Funktionen 1

Was ist eine Funktion?

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem x aus einer Definionsmenge D genau ein y aus einer Wertemenge W zuordnet.

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f\colon y = x^2 + 2x + 3$?

f: Name der Funktion

x: Argument, Stelle

y: Wert

$y = x^2 + 2x + 3$: Funktionsgleichung

$x^2 + 2x + 3$: Funktionsterm

Funktionen 3

Was ist der *Graph* G_f einer Funktion f?

Die Menge aller Zahlenpaare (Punkte) mit der ersten Koordinate x und der zweiten Koordinate $y = f(x)$. Formal:

$G_f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$

Funktionen 4

Was ist eine *Nullstelle* einer Funktion f?

Eine Nullstelle x_0 ist eine Stelle $x_0 \in D$ für die $f(x_0) = 0$ gilt.

Funktionen 5

Was ist der *Ordinatenabschnitt* einer Funktion f?

Der Ordinatenabschnitt y_0 ist der Wert der Funktion f an der Stelle $x = 0$, sofern $0 \in D$. Formal:

$y_0 = f(0)$ falls $0 \in D$

Funktionen 6

Wie ist eine *lineare Funktion* definiert?

$f\colon y = mx + q$ (oder: $y = ax + b$)

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist Steigung der zugehörigen Gerade

q ist der Ordinatenabschnitt der Gerade

Bemerkung: Streng genommen sind lineare Funktionen von der Form $f\colon y = ax$ und der oben beschriebene Funktionstyp wird *affin-linear* genannt. Im „normalen" Schulunterricht ist jedoch die kürzere Bezeichnung *lineare Funktion* üblich.

Funktionen 7

Wie ist eine *quadratische Funktion* definiert?

$f\colon y = ax^2 + bx + c$

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet

$a < 0$: Parabel nach unten geöffet

c: Ordinatenabschnitt

Durch quadratische Ergänzung kann die quadratische Funktion in die Scheitelpunktform gebracht und so einfacher skizziert werden:

$y = ax^2 + bx + c = a(x - u)^2 + v$

Funktionen 8

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = x^2 + 3x - 9$ an.

$D = \mathbb{R}$

Funktionen 9

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an.

$D = [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$

Funktionen 10

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ an.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Funktionen 11

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \mathrm{e}^x$ an.

$D = \mathbb{R}$

Funktionen 12

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \ln(x)$ an.

$D = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$

Funktionen 13

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \sin(x)$ an.

$D = \mathbb{R}$

Funktionen 14

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \cos(x)$ an.

$D = \mathbb{R}$

Funktionen 15

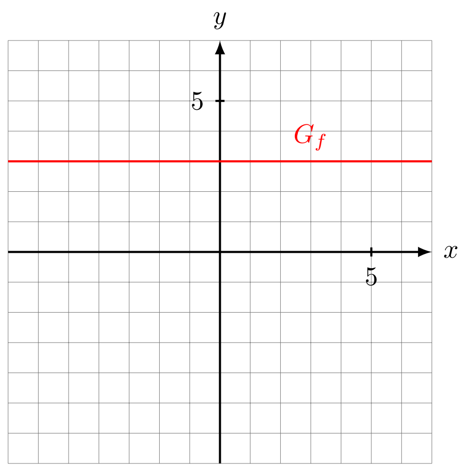
Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon y = \tan(x)$ an.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Da $\tan(\alpha)$ die Steigung einer Geraden angibt, die mit der x-Achse den Winkel α einschliesst, ist diese Steigung für $\alpha = \pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, \ldots$ unendlich gross und daher nicht definiert. Rechnet man diese „problematischen" Winkel ins Bogenmass um und entfernt sie aus dem Definitionsbereich, erhält man die obige Darstellung von D.

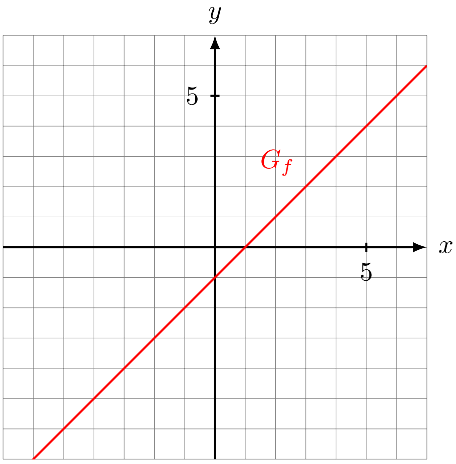
Funktionen 16

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = 3$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



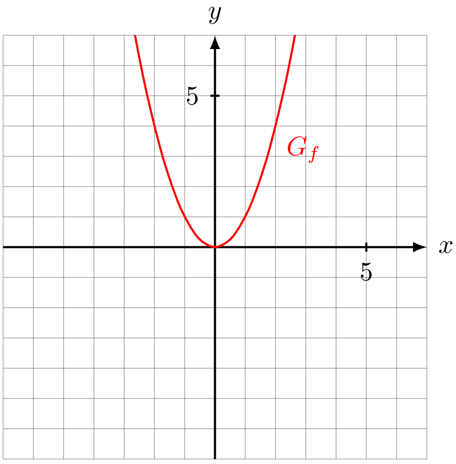
Funktionen 17

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = x - 1$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



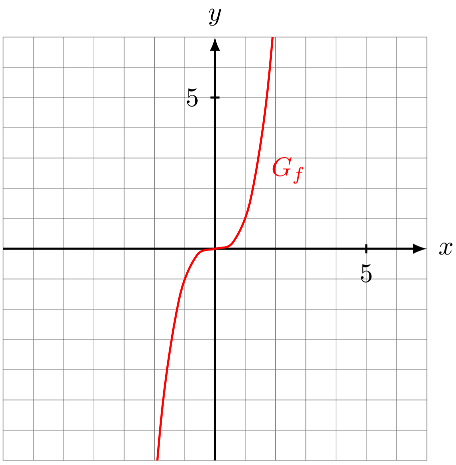
Funktionen 18

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = x^2$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



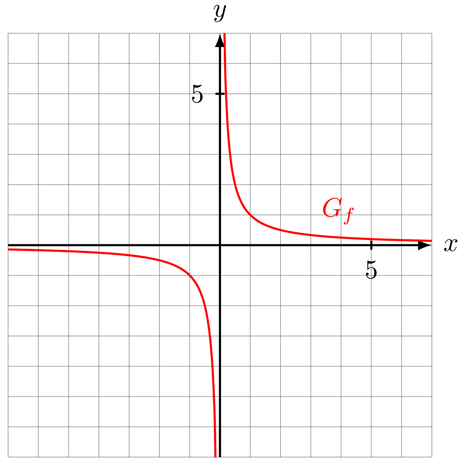
Funktionen 19

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = x^3$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 20

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon\, y = \dfrac{1}{x}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



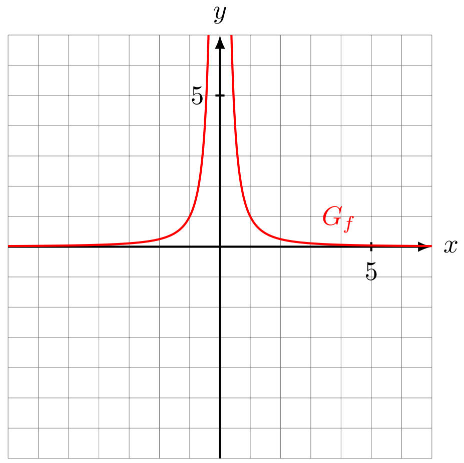
Asymptoten:

$y = 0$ (x-Achse)

$x = 0$ (y-Achse)

Funktionen 21

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon\, y = \dfrac{1}{x^2}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



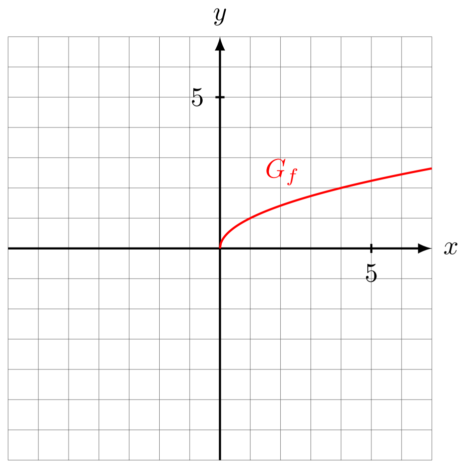
Asymptoten:

$y = 0$ (x-Achse)

$x = 0$ (y-Achse)

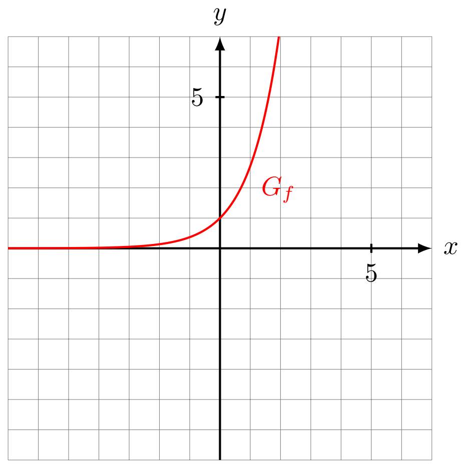
Funktionen 22

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 23

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = \mathrm{e}^x$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



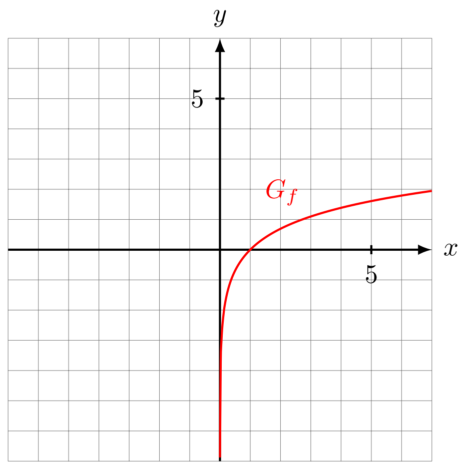
$\mathrm{e} \approx 2.71818\ldots$

Asymptote:

$y = 0$ (x-Achse)

Funktionen 24

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.

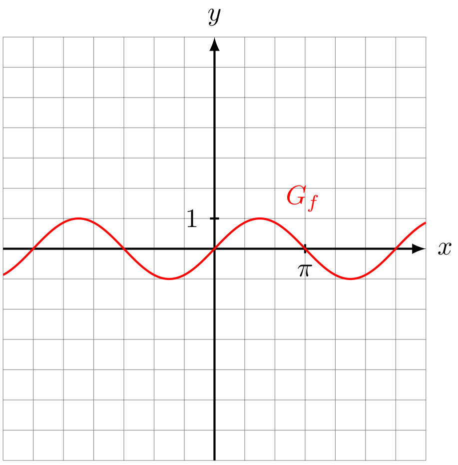


Asymptote:

$x = 0$ (y-Achse)

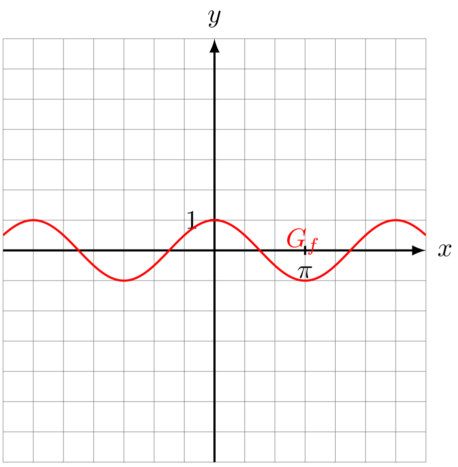
Funktionen 25

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



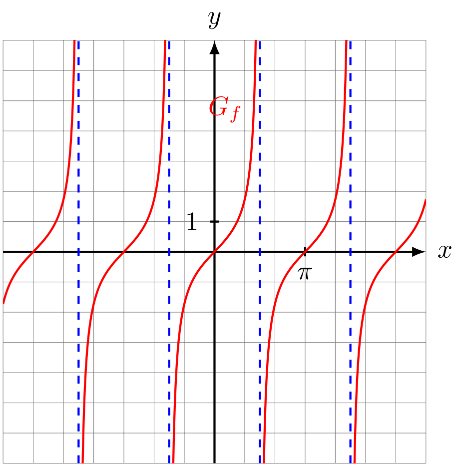
Funktionen 26

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 27

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \tan(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Asymptoten:

...

$x = -\frac{3\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2}$

...

Funktionen 28

Wie wird die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f bestimmt?

1. Vertausche die Variablen x und y in der Gleichung $y = f(x)$.

2. Löse die neue Gleichung $x = f(y)$ nach y auf.

Alternative: zuerst die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen und dann die Variablen vertauschen.

Funktionen 29

Der Graph G_f einer Funktion ist gegeben. Wie lässt sich der Graph der Umkehrfunktion $G_{f^{-1}}$ ohne Rechnung bestimmen?

G_f an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln $\quad \Rightarrow \quad G_{f^{-1}}$

Funktionen 30

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = x$

$x = y$ Variablen vertauschen

$f^{-1}\colon y = x$ neue Gleichung nach y auflösen

Wenn Funktionen symmetrisch zur Geraden $y = x$ sind, dann stimmen sie mit ihrere Umkehrfunktion überein.

Funktionen 31

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = x^2$

$x = y^2$ Variablen vertauschen

$f^{-1}\colon y = \sqrt{x}$ neue Gleichung nach y auflösen

Funktionen 32

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{y}$ Variablen vertauschen

$f^{-1}\colon y = \frac{1}{x}$ neue Gleichung nach y auflösen

Funktionen 33

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = \mathrm{e}^x$

$x = \mathrm{e}^y$ Variablen vertauschen

$\ln(x) = y$ $\quad||\ \ln$ neue Gleichung nach y auflösen

$f^{-1}\colon y = \ln(x)$

Funktionen 34

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = 2x - 4$

$x = 2y - 4$ Variablen vertauschen

$2y = x + 4$ neue Gleichung nach y auflösen

$f^{-1}\colon y = \frac{1}{2}x + 2$

Funktionen 35

Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f. Skizziere den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1}.