Analysis 1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Analysis 2

$$\lim_{x\to -1}(x^2 - 3x + 4) = (-1)^2 - 3\cdot(-1) + 4 = 1 + 3 + 4 = 8$$

Die elementaren Rechenoperationen ($+$, $-$, $\times$, $\div$) sind stetig. Daher kann die Limesbildung mit diesen Operationen vertauscht werden.

Analysis 3

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

Analysis 4

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-7}{2x^2-x+3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x-7)/x^2}{(2x^2-x+3)/x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+7/x^2}{2-1/x+3/x^2} \\ &= \frac{1+0+0}{2-0+0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Analysis 5

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Analysis 6

$$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Analysis 7

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Analysis 8

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig? (anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann.

formal: Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt

Analysis 9

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar? (anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 stetig ist und dort eine Tangente besitzt.

formal: Wenn

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt und

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

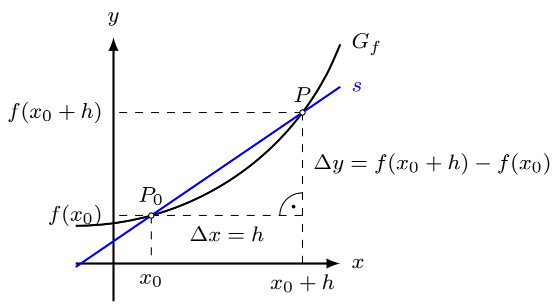
Analysis 10

Welche Fragestellung steht im Zentrum der Differentialrechnung?

Das *Tangentenproblem*; d. h. die Bestimmung der Tangente an den Graphen einer Funktion f.

Analysis 11

Wie ist der *Differenzenquotient* einer Funktion f an einer Stelle x_0 definiert?

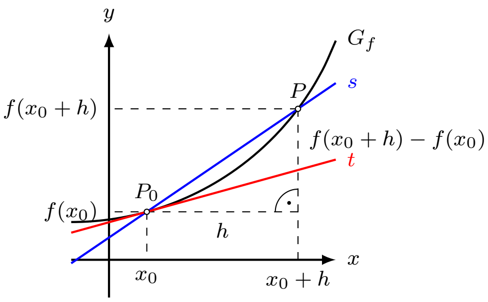


Differenzenquotient: Steigung der Sekante durch P_0 und P:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Analysis 12

Wie ist der *Differenzialquotient* einer Funktion f an einer Stelle x_0 definiert?



Der Differenzialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten für $t \to 0$ und entspricht der Steigung der Tangente t an den Graphen G_f an der Stelle x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{[Ableitung von } f \text{ an der Stelle } x_0\text{]}$$

Analysis 13

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f\colon y = x^2$ an der Stelle $x = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 \end{aligned}$$

Analysis 14

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3 + h} - \sqrt{3}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{3 + h} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}\right)} \qquad \text{mit 3. binom. Formel erweitern} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 3}{h\left(\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}\right)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

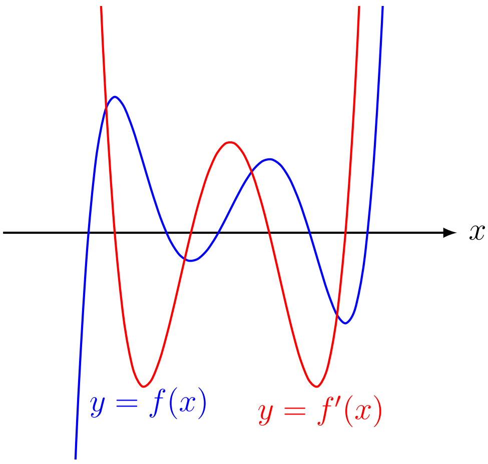
Analysis 15

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{3}{3(3+h)} - \frac{3+h}{3(3+h)}\right] \qquad \text{erweitern} \to \text{gleicher Nenner} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{3(3+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

Analysis 16

Differenziere graphisch:



Analysis 17

Wie berechnet man den Steigungswinkel α einer Tangente aus dem Wert ihrere Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0?

$\alpha = \arctan\big(f'(x_0)\big)$

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m = f'(x_0)$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m \cdot x_0 + q$

(4) Gleichung nach q auflösen: $q = y_0 - m \cdot x_0$

(5) $g : y = m \cdot x + q$ (mit m und q eingesetzt)

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

(1b) Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m_n in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m_n \cdot x_0 + q$

(4) Gleichung nach q auflösen: $q = y_0 - m_n \cdot x_0$

(5) $g : y = m_n \cdot x + q \quad$ (mit m_n und q eingesetzt)

Analysis 20

$f(x) = c \quad$ (c ist konstant)

$f'(x) = 0$

Analysis 21

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

Analysis 22

$f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

Analysis 23

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ Vorsicht: der Exponent ist „negativ“; daher $n+1$ statt $n-1$

oder: $f(x) = x^{-n}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Analysis 24

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

oder: $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Analysis 25

$f(x) = \mathrm{e}^x$

$f'(x) = \mathrm{e}^x$

Analysis 26

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

Analysis 27

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

Analysis 28

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

Analysis 29

$f(x) = \tan(x)$

$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

oder mit der Quotientenregel herleiten:

$$\big[\tan(x)\big]' = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

aus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt auch $\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Analysis 30

$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)$ (Summenregel)

Analysis 31

$\left[c\cdot f(x)\right]' = c\cdot f'(x)$ (Faktorregel)

Analysis 32

$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ (Produktregel)

Analysis 33

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$ (Quotientenregel)

Analysis 34

$\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ (Kettenregel)

Analysis 35

Wie bestimmt man den Definitionsbereich D einer Funktion f?

Der Definitionsbereich ist die Menge aller $x\in\mathbb{R}$ für die sich ein Funktionswert berechnen lässt. Daher müssen in Brüchen, Wurzeln oder Logarithmen diejenigen x ausgeschlossen werden die zu einer Verletzung von Rechenregeln führen.

Analysis 36

Wie bestimmt man die Nullstellen einer Funktion f?

Man bestimmt die Menge aller x, für die $f(x)=0$ gilt.

Die Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.

Analysis 37

Wie bestimmt man den Ordinatenabschnitt einer Funktion f?

Man berechnet $y=f(0)$.

Der Ordinatenabschnitt ist die y-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse.

Analysis 38

Wie untersucht man, ob der Graph einer Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse ist?

Prüfe durch eine formale Rechnung, ob $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Analysis 39

Wie untersucht man, ob der Graph einer Funktion f punktsymmetrisch zur Koordinatenursprung $(0,0)$ ist?

Prüfe durch eine formale Rechnung, ob $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Analysis 40

Welche Form hat eine Polynomfunktion vom Grad n?

Synonyme: Parabel n-ter Ordnung
ganzrationale Funkion vom Grad n

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + x - 12$

Analysis 41

Welche Form hat eine gebrochenrationale Funktion f?

Ein Quotient aus einer Polynomfunktion vom Grad n und einer Polynomfunktion vom Grad m:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

Analysis 42

Wie bestimmt man die vertikalen Asymptoten einer gebrochenrationalen Funktion f?

Die *vertikalen Asymptoten* (*Pole*) haben die Form $x = a$ wobei a eine Nullstelle des Nenners, die nicht auch Nullstelle des Nenners sind.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$

$x = 2$ ist vertikale Asymptote, da $2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 \neq 0$

Analysis 43

Wie bestimmt man die nicht-vertikale Asymptote einer gebrochenrationalen Funktion f?

Man führt eine Polynomdivision durch und lässt den echt gebrochenen Rest weg, da dieser für $|x| \to \infty$ gegen Null strebt.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$

```
                                         2
 (x^2 - 3x + 4) : (x - 2) = x - 1 + -----
-(x^2 - 2x)                          x - 2
 ----------
        -x + 4
      -(-x + 2)
       --------
             2
```

$\Rightarrow \quad g(x) = x - 1$ (schiefe Asymptote)

Analysis 44

Wie bestimmt man die Extrempunkte einer Funktion f?

(1) Berechne die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

(2) Die Lösungen x_1, x_2, ... der Gleichung $f'(x) = 0$ sind die Stellen mit horizontaler Tangente.

(3) Teste für jede Lösung x_i („Kandidatin“) von (2):

$f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i$ ist Minimalstelle $\Rightarrow \big(x_i, f(x_i)\big)$ ist Hochpunkt

$f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i$ ist Maximalstelle $\Rightarrow \big(x_i, f(x_i)\big)$ ist Tiefpunkt

$f''(x_i) = 0 \Rightarrow x_i$ ist vermutlich Terrassenstelle

Analysis 45

Wie bestimmt man die Wendepunkte einer Funktion f?

(1) Berechne die zweite und dritte Ableitung $f''(x)$ und $f'''(x)$.

(2) Die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ der Gleichung $f''(x) = 0$ sind die Stellen mit verschwindender Krümmung.

(3) Teste für jede Lösung x_i („Kandidatin") von (2):

$f'''(x_i) \neq 0 \Rightarrow x_i$ ist Wendestelle $\Rightarrow \big(x_i, f(x_i)\big)$ ist Wendepunkt

$f'''(x_i) = 0$ Berechne weitere Ableitungen $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $\ldots$ und setze x_i ein. Ist die erste Ableitung, für die $f^{(k)}(x_i) \neq 0$ gilt ungerade, so ist x_i eine Wendestelle, sonst eine Extremstelle.

Diese zusätzliche Regel gehört nicht zum Prüfungsstoff an der Matura 2022.

Analysis 46

Was ist ein *Terrassenpunkt* (Synonym: *Sattelpunkt*)?

Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

konkret: Ist (x_0, y_0) ein Terrassenpunkt, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Zielfunktion (ZF): Drücke die Grösse, welche extremal (maximal oder minimal) werden soll, durch eine Funktion aus.

Nebenbedingungen (NB): Enthält die Zielfunktion mehr als eine Variable, so müssen diese mit Hilfe von Nebenbedingungen durch eine einzige Variable ausgedrückt werden.

NB in ZF einsetzen: Danach hängt die Zielfunktion nur noch von einer Variablen ab.

Extremstellen bestimmen: Mit Hilfe der ersten Ableitung werden die möglichen Extremstellen bestimmt und mit der zweiten Ableitung getestet, ob es sich um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

Übrige Grössen: Hat man die gesuchte Extremstelle gefunden, müssen evtl. noch weitere Grössen (y-Koordinate, Abstände, Volumina, $\ldots$) berechnet werden.

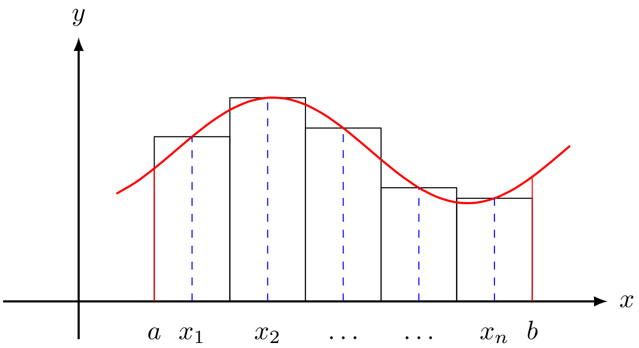
Analysis 48

Welche Fragestellung steht im Zentrum der Integralrechnung?

Das *Flächenproblem*; d. h. die Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f, der x-Achse sowie den Grenzen $x = a$ und $x = b$.

Analysis 49

Wie ist das bestimmte Integral für eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion definiert?



Zerlege die Fläche in n Streifen gleicher Breite $\Delta x = (b - a)/n$.

Bestimme die Streifenmitten x_i.

Ersetze die Streifen durch Rechtecke der Breite Δx und der Höhe $f(x_i)$.

bestimmtes Integral: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ (wenn der Grenzwert existiert)

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

für a, b, $c \in \mathbb{R}$

Analysis 51

Wie ist die *Integralfunktion* $F(x)$ einer Funktion f mit der unteren Grenze x_0 definiert?

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Die Integralfunktion von f ist eine Funktion der oberen Grenze bei festgehaltener unterer Grenze. Die Integrationsvariable heisst hier t, um sie von der oberen Grenze x zu unterscheiden.

Analysis 52

Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Teil 1: Ist f eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Integralfunktion mit einer beliebigen unteren Grenze x_0, so gilt $F'(x) = f(x)$.

Das bedeutet, dass wir aus der Funktion f eine Integralfunktion F bestimmen können, indem wir das Differenzieren umkehren.

Teil 2: Ist $F(x)$ eine beliebige Integralfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

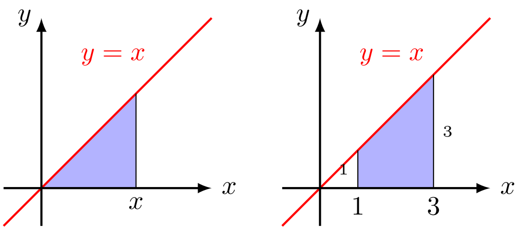
Das bedeutet, dass die in der Integralfunktion willkürlich gewählte untere Integrationsgrenze x_0 für die Berechnung bestimmter Integrale keine Rolle mehr spielt.

Analysis 53

Überprüfe die Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Ingegralrechnung bei der Berechnung des folgenden Integrals:

$$\int_1^3 x\,\mathrm{d}x = \,?$$

Bestimme eine Flächeninhaltsfunktion von $f(x) = x$ mit $x_0 = 0$ (einfach zu rechnen).



$F_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$ [in der Tat gilt $F_0'(x) = x = f(x)$]

$$\int_1^3 x\,\mathrm{d}x = F_0(3) - F_0(1) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Trapezformel: $A = m \cdot h = \dfrac{1+3}{2} \cdot 2 = 4$ (ok)

Analysis 54

Was ist eine *Stammfunktion* einer Funktion f?

Eine Stammfunktion F einer Funktion f ist eine Funktion mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$.

Analysis 55

Was ist das *unbestimmte Integral* einer Funktion f?

Das unbestimmte Integral einer Funktion f ist die Menge aller Stammfunktionen von f. Das unbestimmte Integral ist bis auf eine additive Konstante (die Integrationskonstante C) eindeutig bestimmt.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Analysis 56

Wie lautet die Summenregel für das bestimmte Integral?

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 57

Wie lautet die Faktorregel für das bestimmte Integral?

$$\int_a^b \big(c \cdot f(x)\big)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 58

Beschreibe die Möglichkeiten, das bestimmte Integral für Flächenberechnungen einzusetzen.

Da das bestimmte Integral nur eine Flächeninhaltsbilanz liefert, müssen wir bei Null- und Schnittstellen die Integration unterbrechen.

(1) Für stetige Funktionen mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Hat eine Funktion f die Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, so gilt:

$$A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \ldots + \left|\int_{x_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

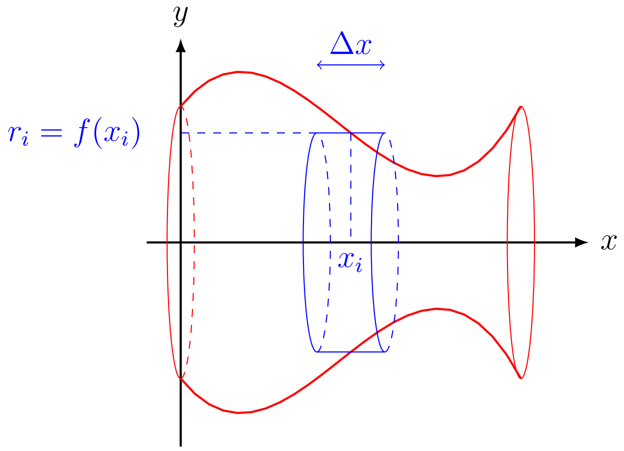
(3) Schneiden sich die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $[a, b]$ nur an der Stelle $a \leq x_s \leq b$, so gilt:

$$A = \left|\int_a^{x_s} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_s}^{b} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

Analysis 59

Wie wird das Volumen eines Rotationskörpers berechnet?

Drehe eine Kurve um eine Koordinatenachse $\Rightarrow$ Rotationskörper



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

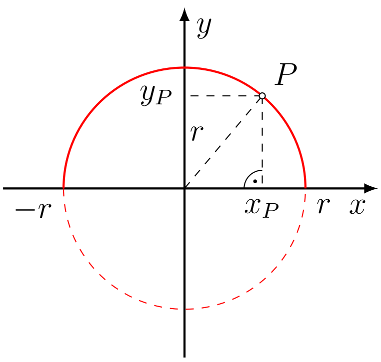
$$V_i = \pi \cdot r_i^2 \cdot \Delta x$$

Ihr Volumen ist der Grenzwert einer Summe von Zylindern mit $r_i = f(x_i)$ und $h = \Delta x$.

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta x = \int_a^b \pi\, f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 60

Leite die Volumenformel für eine Kugel mit Radius r her.



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) = 2\pi \cdot \tfrac{2}{3}r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$