Maturavorbereitung (Basics)

Analysis

Analysis 1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$$

Analysis 1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Analysis 2

$$\lim_{x\to -1}(x^2 - 3x + 4)$$

Analysis 2

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + 4) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4$$

Analysis 2

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3x+4) = (-1)^2 - 3\cdot(-1) + 4 = 1+3+4$$

Analysis 2

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + 4) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 = 1 + 3 + 4 = 8$$

Analysis 2

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + 4) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4 = 1 + 3 + 4 = 8$$

Die elementaren Rechenoperationen ($+$, $-$, $\times$, $\div$) sind stetig. Daher kann die Limesbildung mit diesen Operationen vertauscht werden.

Analysis 3

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Analysis 3

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

Analysis 3

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3)$$

Analysis 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

Analysis 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 7}{2x^2 - x + 3}$$

Analysis 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-7}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x-7)/x^2}{(2x^2-x+3)/x^2}$$

Analysis 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-7}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x-7)/x^2}{(2x^2-x+3)/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+7/x^2}{2-1/x+3/x^2}$$

Analysis 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-7}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x-7)/x^2}{(2x^2-x+3)/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+7/x^2}{2-1/x+3/x^2}$$

$$= \frac{1+0+0}{2-0+0}$$

Analysis 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-7}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x-7)/x^2}{(2x^2-x+3)/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x+7/x^2}{2-1/x+3/x^2}$$

$$= \frac{1+0+0}{2-0+0} = \frac{1}{2}$$

Analysis 5

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x)$$

Analysis 5

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Analysis 6

$$\lim_{x \to -\infty} e^x$$

Analysis 6

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Analysis 7

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$$

Analysis 7

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Analysis 8

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig? (anschaulich und formal)

Analysis 8

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig? (anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann.

Analysis 8

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig? (anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann.

formal: Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt

Analysis 9

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar?
(anschaulich und formal)

Analysis 9

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar? (anschaulich und formal)

anschaulich:

Analysis 9

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar? (anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 stetig ist und dort eine Tangente besitzt.

Analysis 9

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar?
(anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 stetig ist und dort eine Tangente besitzt.

formal: Wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{gilt und}$$

Analysis 9

Wann ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar?
(anschaulich und formal)

anschaulich: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 stetig ist und dort eine Tangente besitzt.

formal: Wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{gilt und}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Analysis 10

Welche Fragestellung steht im Zentrum der Differentialrechnung?

Analysis 10

Welche Fragestellung steht im Zentrum der Differentialrechnung?

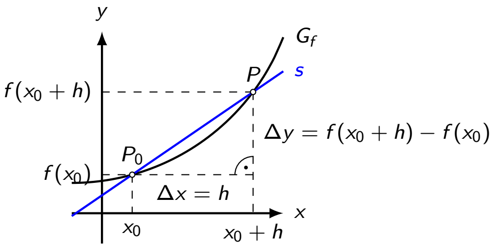
Das *Tangentenproblem*; d. h. die Bestimmung der Tangente an den Graphen einer Funktion f.

Analysis 11

Wie ist der *Differenzenquotient* einer Funktion f an einer Stelle x_0 definiert?

Analysis 11

Wie ist der *Differenzenquotient* einer Funktion f an einer Stelle x_0 definiert?



Differenzenquotient: Steigung der Sekante durch P_0 und P:

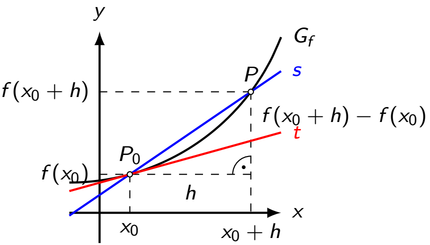
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Analysis 12

Wie ist der *Differenzialquotient* einer Funktion f an einer Stelle x_0 definiert?

Analysis 12

Wie ist der *Differenzialquotient* einer Funktion f an einer Stelle x_0 definiert?



Der Differenz<u>ial</u>quotient ist der Grenzwert des Differenz<u>en</u>quotienten für $t \to 0$ und enstpricht der Steigung der Tangente t an den Graphen G_f an der Stelle x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{[Ableitung von } f \text{ an der Stelle } x_0\text{]}$$

Analysis 13

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f: y = x^2$ an der Stelle $x = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

Analysis 13

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f: y = x^2$ an der Stelle $x = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (6+h) = 6
\end{aligned}
$$

Analysis 14

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

Analysis 14

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f: y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3+h} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)} \quad \text{mit 3. binom. Formel erweitern}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3+h-3}{h\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Analysis 15

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

Analysis 15

Zeige, wie die Steigung der Funktion $f: y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 3$ mit dem Differenzialquotient berechnet wird.

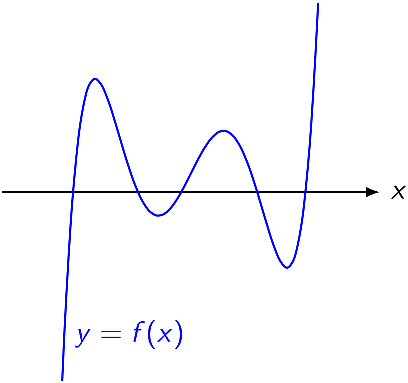
$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{3}{3(3+h)} - \frac{3+h}{3(3+h)}\right] \qquad \text{erweitern} \rightarrow \text{gleicher Nenner}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{3(3+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}$$

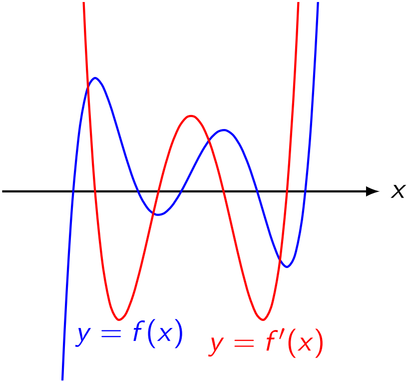
Analysis 16

Differenziere graphisch:



Analysis 16

Differenziere graphisch:



Analysis 17

Wie berechnet man den Steigungswinkel α einer Tangente aus dem Wert ihrere Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0?

Analysis 17

Wie berechnet man den Steigungswinkel α einer Tangente aus dem Wert ihrere Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0?

$\alpha = \arctan\left(f'(x_0)\right)$

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m = f'(x_0)$

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m = f'(x_0)$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m = f'(x_0)$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m \cdot x_0 + q$

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m = f'(x_0)$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m \cdot x_0 + q$

(4) Gleichung nach q auflösen: $q = y_0 - m \cdot x_0$

Analysis 18

Wie bestimmt man die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m = f'(x_0)$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m \cdot x_0 + q$

(4) Gleichung nach q auflösen: $q = y_0 - m \cdot x_0$

(5) $g : y = m \cdot x + q \quad$ (mit m und q eingesetzt)

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

(1b) Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

(1b) Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

(1b) Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m_n in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m_n \cdot x_0 + q$

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

(1b) Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m_n in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m_n \cdot x_0 + q$

(4) Gleichung nach q auflösen: $q = y_0 - m_n \cdot x_0$

Analysis 19

Wie bestimmt man die Gleichung der Normalen an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0?

(1a) Tangentensteigung an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$

(1b) Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\dfrac{1}{m_t}$

(2) Funktionswert an der Stelle x_0: $y_0 = f(x_0)$

(3) x_0, y_0 und m_n in $y = mx + q$ einsetzen: $y_0 = m_n \cdot x_0 + q$

(4) Gleichung nach q auflösen: $q = y_0 - m_n \cdot x_0$

(5) $g : y = m_n \cdot x + q$ (mit m_n und q eingesetzt)

Analysis 20

$f(x) = c \quad (c \text{ ist konstant})$

Analysis 20

$f(x) = c \quad (c \text{ ist konstant})$

$f'(x) =$

Analysis 20

$f(x) = c \quad (c \text{ ist konstant})$

$f'(x) = 0$

Analysis 21

$$f(x) = x$$

Analysis 21

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

Analysis 22

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) =$$

Analysis 22

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Analysis 23

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) =$$

Analysis 23

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Analysis 23

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Vorsicht: der Exponent ist „negativ“; daher $n+1$ statt $n-1$

Analysis 23

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$ Vorsicht: der Exponent ist „negativ“; daher $n+1$ statt $n-1$

oder: $f(x) = x^{-n}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Analysis 24

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) =$$

Analysis 24

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Analysis 24

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

oder: $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Analysis 25

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

$$f'(x) =$$

Analysis 25

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

Analysis 26

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) =$$

Analysis 26

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Analysis 27

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) =$$

Analysis 27

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Analysis 28

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) =$$

Analysis 28

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

Analysis 29

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f'(x) =$$

Analysis 29

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Analysis 29

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

oder mit der Quotientenregel herleiten:

$$\left[\tan(x)\right]' = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

aus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt auch $\dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Analysis 30

$$\left[f(x)+g(x)\right]' =$$

Analysis 30

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x) \qquad \text{(Summenregel)}$$

Analysis 31

$$\left[c \cdot f(x)\right]' =$$

Analysis 31

$$\big[c \cdot f(x)\big]' = c \cdot f'(x) \qquad \text{(Faktorregel)}$$

Analysis 32

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' =$$

Analysis 32

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \text{(Produktregel)}$$

Analysis 33

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' =$$

Analysis 33

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

Analysis 34

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' =$$

Analysis 34

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \quad \text{(Kettenregel)}$$

Analysis 35

Wie bestimmt man den Definitionsbereich D einer Funktion f?

Analysis 35

Wie bestimmt man den Definitionsbereich D einer Funktion f?

Der Definitionsbereich ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für die sich ein Funktionswert berechnen lässt. Daher müssen in Brüchen, Wurzeln oder Logarithmen diejenigen x ausgeschlossen werden die zu einer Verletzung von Rechenregeln führen.

Analysis 36

Wie bestimmt man die Nullstellen einer Funktion f?

Analysis 36

Wie bestimmt man die Nullstellen einer Funktion f?

Man bestimmt die Menge aller x, für die $f(x) = 0$ gilt.

Die Nullstellen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.

Analysis 37

Wie bestimmt man den Ordinatenabschnitt einer Funktion f?

Analysis 37

Wie bestimmt man den Ordinatenabschnitt einer Funktion f?

Man berechnet $y = f(0)$.

Der Ordinatenabschnitt ist die y-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse.

Analysis 38

Wie untersucht man, ob der Graph einer Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse ist?

Analysis 38

Wie untersucht man, ob der Graph einer Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse ist?

Prüfe durch eine formale Rechnung, ob $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Analysis 39

Wie untersucht man, ob der Graph einer Funktion f punktsymmetrisch zur Koordinatenursprung $(0, 0)$ ist?

Analysis 39

Wie untersucht man, ob der Graph einer Funktion f punktsymmetrisch zur Koordinatenursprung $(0, 0)$ ist?

Prüfe durch eine formale Rechnung, ob $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Analysis 40

Welche Form hat eine Polynomfunktion vom Grad n?

Synonyme: Parabel n-ter Ordnung
ganzrationale Funkion vom Grad n

Analysis 40

Welche Form hat eine Polynomfunktion vom Grad n?

Synonyme: Parabel n-ter Ordnung
ganzrationale Funkion vom Grad n

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + x - 12$

Analysis 41

Welche Form hat eine gebrochenrationale Funktion f?

Analysis 41

Welche Form hat eine gebrochenrationale Funktion f?

Ein Quotient aus einer Polynomfunktion vom Grad n und einer Polynomfunktion vom Grad m:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

Analysis 42

Wie bestimmt man die vertikalen Asymptoten einer gebrochenrationalen Funktion f?

Analysis 42

Wie bestimmt man die vertikalen Asymptoten einer gebrochenrationalen Funktion f?

Die *vertikalen Asymptoten* (*Pole*) haben die Form $x = a$ wobei a eine Nullstelle des Nenners, die nicht auch Nullstelle des Nenners sind.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$

$x = 2$ ist vertikale Asymptote, da $2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 \neq 0$

Analysis 43

Wie bestimmt man die nicht-vertikale Asymptote einer gebrochenrationalen Funktion f?

Analysis 43

Wie bestimmt man die nicht-vertikale Asymptote einer gebrochenrationalen Funktion f?

Man führt eine Polynomdivision durch und lässt den echt gebrochenen Rest weg, da dieser für $|x| \to \infty$ gegen Null strebt.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$

```
                                              2
 (x^2 - 3x + 4) : (x - 2) = x - 1 + -----
-(x^2 - 2x)                          x - 2
 ----------
       -x + 4
     -(-x + 2)
      --------
             2
```

$\Rightarrow \quad g(x) = x - 1$ (schiefe Asymptote)

Analysis 44

Wie bestimmt man die Extrempunkte einer Funktion f?

Analysis 44

Wie bestimmt man die Extrempunkte einer Funktion f?

(1) Berechne die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

Analysis 44

Wie bestimmt man die Extrempunkte einer Funktion f?

(1) Berechne die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

(2) Die Lösungen $x_1, x_2, \dots$ der Gleichung $f'(x) = 0$ sind die Stellen mit horizontaler Tangente.

Analysis 44

Wie bestimmt man die Extrempunkte einer Funktion f?

(1) Berechne die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

(2) Die Lösungen x_1, x_2, ... der Gleichung $f'(x) = 0$ sind die Stellen mit horizontaler Tangente.

(3) Teste für jede Lösung x_i („Kandidatin") von (2):

$f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i$ ist Minimalstelle $\Rightarrow \big(x_i, f(x_i)\big)$ ist Hochpunkt

$f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i$ ist Maximalstelle $\Rightarrow \big(x_i, f(x_i)\big)$ ist Tiefpunkt

$f''(x_i) = 0 \Rightarrow x_i$ ist vermutlich Terrassenstelle

Analysis 45

Wie bestimmt man die Wendepunkte einer Funktion f?

Analysis 45

Wie bestimmt man die Wendepunkte einer Funktion f?

(1) Berechne die zweite und dritte Ableitung $f''(x)$ und $f'''(x)$.

(2) Die Lösungen $x_1, x_2, \ldots$ der Gleichung $f''(x) = 0$ sind die Stellen mit verschwindender Krümmung.

(3) Teste für jede Lösung x_i („Kandidatin") von (2):

$f'''(x_i) \neq 0 \Rightarrow x_i$ ist Wendestelle $\Rightarrow \big(x_i, f(x_i)\big)$ ist Wendepunkt

$f'''(x_i) = 0$ Berechne weitere Ableitungen $f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$ und setze x_i ein. Ist die erste Ableitung, für die $f^{(k)}(x_i) \neq 0$ gilt ungerade, so ist x_i eine Wendestelle, sonst eine Extremstelle.

Diese zusätzliche Regel gehört nicht zum Prüfungsstoff an der Matura 2022.

Analysis 46

Was ist ein *Terrassenpunkt* (Synonym: *Sattelpunkt*)?

Analysis 46

Was ist ein *Terrassenpunkt* (Synonym: *Sattelpunkt*)?

Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

konkret: Ist (x_0, y_0) ein Terrassenpunkt, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Zielfunktion (ZF): Drücke die Grösse, welche extremal (maximal oder minimal) werden soll, durch eine Funktion aus.

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Zielfunktion (ZF): Drücke die Grösse, welche extremal (maximal oder minimal) werden soll, durch eine Funktion aus.

Nebenbedingungen (NB): Enthält die Zielfunktion mehr als eine Variable, so müssen diese mit Hilfe von Nebenbedingungen durch eine einzige Variable ausgedrückt werden.

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Zielfunktion (ZF): Drücke die Grösse, welche extremal (maximal oder minimal) werden soll, durch eine Funktion aus.

Nebenbedingungen (NB): Enthält die Zielfunktion mehr als eine Variable, so müssen diese mit Hilfe von Nebenbedingungen durch eine einzige Variable ausgedrückt werden.

NB in ZF einsetzen: Danach hängt die Zielfunktion nur noch von einer Variablen ab.

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Zielfunktion (ZF): Drücke die Grösse, welche extremal (maximal oder minimal) werden soll, durch eine Funktion aus.

Nebenbedingungen (NB): Enthält die Zielfunktion mehr als eine Variable, so müssen diese mit Hilfe von Nebenbedingungen durch eine einzige Variable ausgedrückt werden.

NB in ZF einsetzen: Danach hängt die Zielfunktion nur noch von einer Variablen ab.

Extremstellen bestimmen: Mit Hilfe der ersten Ableitung werden die möglichen Extremstellen bestimmt und mit der zweiten Ableitung getestet, ob es sich um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

Analysis 47

Wie löst man Extremwertaufgaben?

Zielfunktion (ZF): Drücke die Grösse, welche extremal (maximal oder minimal) werden soll, durch eine Funktion aus.

Nebenbedingungen (NB): Enthält die Zielfunktion mehr als eine Variable, so müssen diese mit Hilfe von Nebenbedingungen durch eine einzige Variable ausgedrückt werden.

NB in ZF einsetzen: Danach hängt die Zielfunktion nur noch von einer Variablen ab.

Extremstellen bestimmen: Mit Hilfe der ersten Ableitung werden die möglichen Extremstellen bestimmt und mit der zweiten Ableitung getestet, ob es sich um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

Übrige Grössen: Hat man die gesuchte Extremstelle gefunden, müssen evtl. noch weitere Grössen (y-Koordinate, Abstände, Volumina, ...) berechnet werden.

Analysis 48

Welche Fragestellung steht im Zentrum der Integralrechnung?

Analysis 48

Welche Fragestellung steht im Zentrum der Integralrechnung?

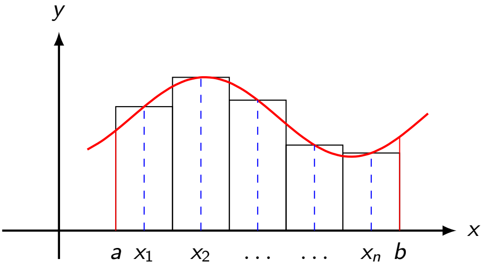
Das *Flächenproblem*; d. h. die Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f, der x-Achse sowie den Grenzen $x = a$ und $x = b$.

Analysis 49

Wie ist das bestimmte Integral für eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion definiert?

Analysis 49

Wie ist das bestimmte Integral für eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion definiert?



Zerlege die Fläche in n Streifen gleicher Breite $\Delta x = (b - a)/n$.

Bestimme die Streifenmitten x_i.

Ersetze die Streifen durch Rechtecke der Breite Δx und der Höhe $f(x_i)$.

bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ (wenn der Grenzwert existiert)

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x =$$

Analysis 50

Zähle drei Eigenschaften des bestimmten Integrals auf.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

Analysis 51

Wie ist die *Integralfunktion* $F(x)$ einer Funktion f mit der unteren Grenze x_0 definiert?

Analysis 51

Wie ist die *Integralfunktion* $F(x)$ einer Funktion f mit der unteren Grenze x_0 definiert?

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Die Integralfunktion von f ist eine Funktion der oberen Grenze bei festgehaltener unterer Grenze. Die Integrationsvariable heisst hier t, um sie von der oberen Grenze x zu unterscheiden.

Analysis 52

Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Analysis 52

Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Teil 1: Ist f eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Integralfunktion mit einer beliebigen unteren Grenze x_0, so gilt $F'(x) = f(x)$.

Das bedeutet, dass wir aus der Funktion f eine Integralfunktion F bestimmen können, indem wir das Differenzieren umkehren.

Analysis 52

Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Teil 1: Ist f eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Integralfunktion mit einer beliebigen unteren Grenze x_0, so gilt $F'(x) = f(x)$.

Das bedeutet, dass wir aus der Funktion f eine Integralfunktion F bestimmen können, indem wir das Differenzieren umkehren.

Teil 2: Ist $F(x)$ eine beliebige Integralfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Analysis 52

Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Teil 1: Ist f eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Integralfunktion mit einer beliebigen unteren Grenze x_0, so gilt $F'(x) = f(x)$.

Das bedeutet, dass wir aus der Funktion f eine Integralfunktion F bestimmen können, indem wir das Differenzieren umkehren.

Teil 2: Ist $F(x)$ eine beliebige Integralfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Das bedeutet, dass die in der Integralfunktion willkürlich gewählte untere Integrationsgrenze x_0 für die Berechnung bestimmter Integrale keine Rolle mehr spielt.

Analysis 53

Überprüfe die Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Ingegralrechnung bei der Berechnung des folgenden Integrals:

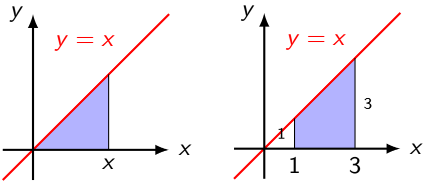
$$\int_1^3 x \, \mathrm{d}x = ?$$

Analysis 53

Überprüfe die Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Ingegralrechnung bei der Berechnung des folgenden Integrals:

$$\int_1^3 x \, \mathrm{d}x = \, ?$$

Bestimme eine Flächeninhaltsfunktion von $f(x) = x$ mit $x_0 = 0$ (einfach zu rechnen).



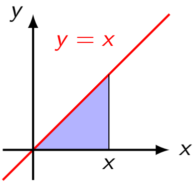
$F_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$ [in der Tat gilt $F_0'(x) = x = f(x)$]

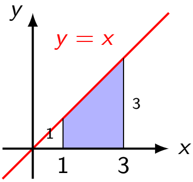
Analysis 53

Überprüfe die Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Ingegralrechnung bei der Berechnung des folgenden Integrals:

$$\int_1^3 x\,\mathrm{d}x = \,?$$

Bestimme eine Flächeninhaltsfunktion von $f(x) = x$ mit $x_0 = 0$ (einfach zu rechnen).





$F_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$ [in der Tat gilt $F_0'(x) = x = f(x)$]

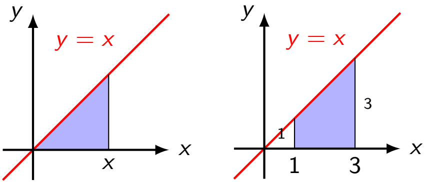
$$\int_1^3 x\,\mathrm{d}x = F_0(3) - F_0(1) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Analysis 53

Überprüfe die Gültigkeit des Hauptsatzes der Differential- und Ingegralrechnung bei der Berechnung des folgenden Integrals:

$$\int_1^3 x \, \mathrm{d}x = \, ?$$

Bestimme eine Flächeninhaltsfunktion von $f(x) = x$ mit $x_0 = 0$ (einfach zu rechnen).



$F_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$ [in der Tat gilt $F_0'(x) = x = f(x)$]

$$\int_1^3 x \, \mathrm{d}x = F_0(3) - F_0(1) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Trapezformel: $A = m \cdot h = \dfrac{1+3}{2} \cdot 2 = 4$ (ok)

Analysis 54

Was ist eine *Stammfunktion* einer Funktion f?

Analysis 54

Was ist eine *Stammfunktion* einer Funktion f?

Eine Stammfunktion F einer Funktion f ist eine Funktion mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$.

Analysis 55

Was ist das *unbestimmte Integral* einer Funktion f?

Analysis 55

Was ist das *unbestimmte Integral* einer Funktion f?

Das unbestimmte Integral einer Funktion f ist die Menge aller Stammfunktionen von f. Das unbestimmte Integral ist bis auf eine additive Konstante (die Integrationskonstante C) eindeutig bestimmt.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Analysis 56

Wie lautet die Summenregel für das bestimmte Integral?

Analysis 56

Wie lautet die Summenregel für das bestimmte Integral?

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 57

Wie lautet die Faktorregel für das bestimmte Integral?

Analysis 57

Wie lautet die Faktorregel für das bestimmte Integral?

$$\int_a^b (c \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 58

Beschreibe die Möglichkeiten, das bestimmte Integral für Flächenberechnungen einzusetzen.

Analysis 58

Beschreibe die Möglichkeiten, das bestimmte Integral für Flächenberechnungen einzusetzen.

Da das bestimmte Integral nur eine Flächeninhaltsbilanz liefert, müssen wir bei Null- und Schnittstellen die Integration unterbrechen.

Analysis 58

Beschreibe die Möglichkeiten, das bestimmte Integral für Flächenberechnungen einzusetzen.

Da das bestimmte Integral nur eine Flächeninhaltsbilanz liefert, müssen wir bei Null- und Schnittstellen die Integration unterbrechen.

(1) Für stetige Funktionen mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 58

Beschreibe die Möglichkeiten, das bestimmte Integral für Flächenberechnungen einzusetzen.

Da das bestimmte Integral nur eine Flächeninhaltsbilanz liefert, müssen wir bei Null- und Schnittstellen die Integration unterbrechen.

(1) Für stetige Funktionen mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Hat eine Funktion f die Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, so gilt:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \ldots + \left| \int_{x_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

Analysis 58

Beschreibe die Möglichkeiten, das bestimmte Integral für Flächenberechnungen einzusetzen.

Da das bestimmte Integral nur eine Flächeninhaltsbilanz liefert, müssen wir bei Null- und Schnittstellen die Integration unterbrechen.

(1) Für stetige Funktionen mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Hat eine Funktion f die Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, so gilt:

$$A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \ldots + \left|\int_{x_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

(3) Schneiden sich die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $[a, b]$ nur an der Stelle $a \leq x_s \leq b$, so gilt:

$$A = \left|\int_a^{x_s} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_s}^{b} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

Analysis 59

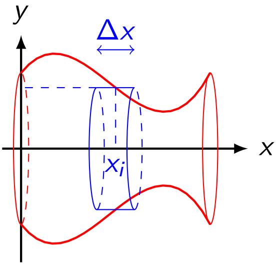
Wie wird das Volumen eines Rotationskörpers berechnet?

Analysis 59

Wie wird das Volumen eines Rotationskörpers berechnet?

Drehe eine Kurve um eine Koordinatenachse $\Rightarrow$ Rotationskörper

$r_i = f(x_i)$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

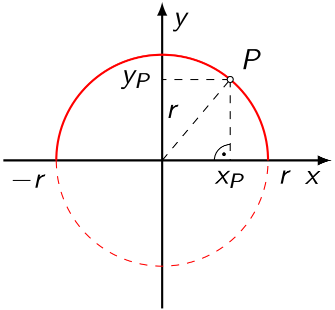
$$V_i = \pi \cdot r_i^2 \cdot \Delta x$$

Ihr Volumen ist der Grenzwert einer Summe von Zylindern mit $r_i = f(x_i)$ und $h = \Delta x$.

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta x = \int_a^b \pi\, f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Analysis 60

Leite die Volumenformel für eine Kugel mit Radius r her.



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) = 2\pi \cdot \tfrac{2}{3}r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$