

Algebra 1

Beschreibe die Menge \mathbb{N} .

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Algebra 2

Beschreibe die Menge \mathbb{N}_0 .

Menge der natürlichen Zahlen mit der Null:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Algebra 3

Beschreibe die Menge \mathbb{Z} .

Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Algebra 4

Beschreibe die Menge \mathbb{Q} .

Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$$

Algebra 5

Beschreibe die Menge \mathbb{R} .

Menge der reellen Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ hat eine abbrechende oder nicht abbrechende Dezimaldarstellung}\}$$

Algebra 6

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $a + b = c$?

a : Summand

b : Summand

c : Summe

Algebra 7

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $a - b = c$?

a: Minuend

b: Subtrahend

c: Differenz

Algebra 8

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $a \cdot b = c$?

a: Faktor

b: Faktor

c: Produkt

Algebra 9

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $a : b = c$?

a: Dividend

b: Divisor

c: Quotient

Algebra 10

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $a^b = c$?

a: Basis

b: Exponent

c: Potenz

Algebra 11

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $\sqrt[b]{a} = c$?

a: Radikand

b: Wurzelexponent

c: Wurzel

Algebra 12

Wie lauten die Fachbegriffe für die Terme im Ausdruck $\log_b a = c$?

a: Numerus

b: Basis

c: Logarithmus

Algebra 13

Wie ist der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl definiert?

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Algebra 14

Was ist eine *Primzahl*?

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p > 1$, die nur durch 1 und sich selber teilbar ist.

Algebra 15

Was ist der grösste gemeinsame Teiler $\text{ggT}(a, b)$ von zwei natürlichen Zahlen a und b ?

Der grösste gemeinsame Teiler von a und b ist die grösste natürliche Zahl, die sowohl a als auch b teilt.

Algebra 16

Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\text{kgV}(a, b)$ der natürlichen Zahlen a und b ?

Das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist die kleinste natürliche Zahl, die sowohl ein Vielfaches von a als auch von b ist.

Algebra 17

Wie werden die Teile des Terms $\frac{a}{b}$ genannt?

a : Zähler

b : Nenner

Algebra 18

Was bedeutet *Kürzen* von Brüchen?

Ein Bruch wird gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch eine Zahl $k \neq 0$ dividiert. Dabei bleibt der Wert des Bruchs unverändert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$$

Algebra 19

Was bedeutet *Erweitern* von Brüchen?

Ein Bruch wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit einer Zahl $k \neq 0$ multipliziert. Dabei bleibt der Wert des Bruchs unverändert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Algebra 20

Wie werden zwei Brüche addiert bzw. subtrahiert?

Zwei Brüche werden addiert [subtrahiert], indem man sie, falls nötig, durch Kürzen oder Erweitern gleichnamig (gleichnennerig) macht und anschliessend die Summe [Differenz] der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Algebra 21

Wie werden zwei Brüche multipliziert?

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Im Gegensatz zur Addition oder Subtraktion müssen hier die Brüche nicht gleichnamig (gleichnennerig) gemacht werden.

Algebra 22

Wie werden zwei Brüche dividiert?

Zwei Brüche werden dividiert, indem man den Dividenten mit dem reziproken Wert (Kehrwert) des Divisors multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Algebra 23

Welche Rechenoperationen in \mathbb{R} sind *kommutativ*?

die Addition: $a + b = b + a$

die Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Algebra 24

Welche Rechenoperationen in \mathbb{R} sind *assoziativ*?

die Addition: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

die Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Algebra 25

Was bedeutet *Faktorisieren* (*Ausklammern*)?

Faktorisieren bedeutet, eine Summe als Produkt darzustellen:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Links steht eine Summe von Produkten; rechts ein Produkt von Summen (a ist eine Summe aus einem Summanden).

Algebra 26

Was bedeutet *Ausmultiplizieren*?

Ausmultiplizieren bedeutet, ein Produkt als Summe darzustellen:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Algebra 27

Wie lauten die *binomischen Formeln*?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Algebra 28

Wie ist a^n für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert?

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$a^0 = 1$$

Algebra 29

Wie ist a^{-n} für $n \in \mathbb{N}$ definiert?

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad a \neq 0$$

Algebra 30

Wie ist $\sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert?

$\sqrt[n]{a} = b$ ist die nichtnegative Zahl b mit $b^n = a$.

Algebra 31

Wie kann $\sqrt[n]{a}$ in der Potenzschreibweise dargestellt werden?

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Algebra 32

Was bedeutet $a^{\frac{m}{n}}$?

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Algebra 33

Wie lauten die Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln?

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad n, m \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad n, m \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\sqrt[n]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m} \quad n, m \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}_0^+$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad n, m \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}_0^+$$

Algebra 34

Wie lauten die Gesetze für das Rechnen mit Potenzen?

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

$$a^p : b^p = (a : b)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

Algebra 35

Wie ist $\log_a b$ definiert?

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \quad \text{für } a > 0, b > 0 \text{ und } b \neq 1$$

Algebra 36

Wie lauten die Abkürzungen für die Logarithmen mit den häufig benutzten Basen?

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{Zehnerlogarithmus}$$

$$\log_e x = \ln x \quad \text{natürlicher Logarithmus (e} \approx 2.7182\dots)$$

$$\log_2 x = \text{lb } x = \text{ld } x \quad \text{binärer oder dualer Logarithmus}$$

Algebra 37

Wie lauten die Logarithmengesetze?

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

Algebra 38

Wie lauten die Basiswechselformel für Logarithmen?

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Algebra 39

Was bedeutet es, eine Gleichung nach einer der darin vorkommenden Variablen zu lösen?

Es bedeutet, alle Werte zu finden, für die eine wahre Aussage entsteht, wenn man sie an die Stelle der Lösungsvariablen einsetzt.

Algebra 40

Gib die Lösung(en) der Gleichung $2x - 10 = 0$ an.

$$x = 5$$

Algebra 41

Gib die Lösung(en) der Gleichung $3x(x - 2)(x + \sqrt{7}) = 0$ an.

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -\sqrt{7}$$

Algebra 42

Gib die Lösung(en) der Gleichung $x^2 - 5x = 0$ an.

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 5$$

Algebra 43

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\frac{x+3}{x-1} = 0$ an.

$$x = -3$$

Es genügt, den Zähler null zu setzen und zu kontrollieren, ob der Nenner für die Lösungen ungleich null ist.

Algebra 44

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$ an.

$$x = \frac{3}{5} \quad (\text{den Kehrwert beider Seiten bestimmen})$$

Algebra 45

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\frac{5}{3} = \frac{10}{x}$ an.

$$x = 6$$

Algebra 46

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\frac{x^2 - 3x}{x} = 0$ an.

$$\frac{x^2 - 3x}{x} = \frac{x(x-3)}{x}$$

Die Gleichung hat nur die Lösung $x = 3$, denn für $x = 0$ ist der Quotient auf der linken Seite der Gleichung nicht definiert.

Algebra 47

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\sqrt{2x+6} = 0$ an.

$$x = -3$$

Eine Wurzelterm ist genau dann null, wenn sein Radikand null ist.

Achtung: Die gesuchte Lösung kann wie hier negativ sein, so lange der Radikand grösser oder gleich null ist.

Algebra 48

Gib die Lösung(en) der Gleichung $x^2 - 5 = 0$ an.

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

Algebra 49

Gib die Lösung(en) der Gleichung $x^2 + 4 = 0$ an.

Die Gleichung hat keine (reelle) Lösungen.

Algebra 50

Gib die Lösung(en) der Gleichung $(x - 1)^2 = 25$ an.

Hier ist es nicht sinnvoll, den Klammerterm auszumultiplizieren. Viel einfacher ist es, sich zu überlegen, für welchen Wert von x in der Klammer 5 oder -5 entsteht, weil dies alle Fälle sind, welche die Gleichung lösen:

$$x_1 = 6, x_2 = -4$$

Algebra 51

Wie lautet die Lösungsformel für die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$?

Berechne $D = b^2 - 4ac$

Falls $D > 0$ gibt es zwei Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Falls $D = 0$ gibt es genau eine Lösung:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Falls $D < 0$ gibt es keine (reelle) Lösung

Algebra 52

Gib die Lösung(en) der Gleichung $e^{x+2} = e^5$ an.

$$e^{x+2} = e^5$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

Algebra 53

Gib die Lösung(en) der Gleichung $x^4 = 81$ an.

$$x^4 = 81$$

$$x^4 = 3^4$$

$$x = \pm 3$$

Algebra 54

Gib die Lösung(en) der Gleichung $x^3 = -8$ an.

$$x^3 = -8$$

$$x^3 = -2^3 = (-2)^3$$

$$x = -2$$

Algebra 55

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\log_{10} x = -2$ an.

$$\log_{10} x = -2$$

$$10^{-2} = x$$

$$x = \frac{1}{100} = 0.01$$

Algebra 56

Gib die Lösung(en) der Gleichung $\ln(x + 3) = \ln(7)$ an.

$$\ln(x + 3) = \ln(7)$$

$$x + 3 = 7$$

$$x = 4 \quad (\text{Probe: ok})$$

Algebra 57

Bestimme die Lösung(en) des Gleichungssystems.

$$4x - 5y = 6$$

$$4x - 5y = 7$$

Das Gleichungssystem ist widersprüchlich

$$L = \{ \}$$

Algebra 58

Bestimme die Lösung(en) des Gleichungssystems.

$$2x + 3y = 4$$

$$4x + 6y = 8$$

Die zweite Gleichung ist von der ersten abhängig. Daher ist jede Lösung der ersten Gleichung auch Lösung der zweiten Gleichung.

$$L = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 4\}$$

Algebra 59

Bestimme die Lösung(en) des Gleichungssystems.

$$x + y = 5$$

$$x - y = 3$$

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man $2x = 8$ und damit $x = 4$.

Subtrahiert man die untere von der oberen Gleichung, so erhält man $2y = 2$ und damit $y = 1$.

$$L = \{(4, 1)\}$$

Algebra 60

Bestimme die Lösung(en) des Gleichungssystems.

$$x + y + z = 9$$

$$y + z = 5$$

$$5z = 10$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man $z = 2$, $y = 3$ und $x = 4$.

$$L = \{(4, 3, 2)\}$$