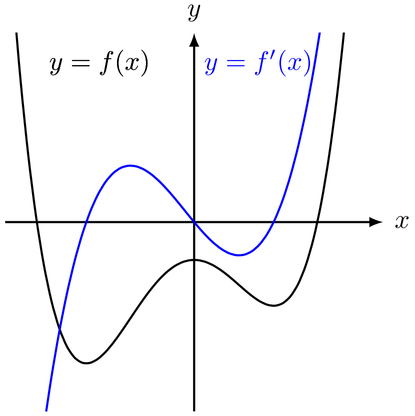
Aufgabe A.1

(a) Graphen:



(b) $f(x) = x^2 + x$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(1+h)^2 + (1+h)\right] - \left[1^2 + 1\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (3+h) = 3$$

Probe mit Ableitungsfunktion: $f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3$

Aufgabe A.2

Schnittpunkt: $x^2 + 4x - 3 = x^2 + 2x - 6$

$$2x + 3 = 0$$
$$x = -1.5 \quad \Rightarrow \quad S(-1.5, -6.75)$$

$$f'(x) = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad m_f = 2 \cdot (-1.5) + 4 = 1$$
$$g'(x) = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_g = 2 \cdot (-1.5) + 2 = -1$$

$$m_f \cdot m_g = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 90^\circ$$

Aufgabe A.3

$f(x) = \dfrac{x^2}{a}, \quad g(x) = \dfrac{a}{x^2}$

Schnittstelle: $\dfrac{x^2}{a} = \dfrac{a}{x^2} \qquad (a \neq 0,\ x \neq 0)$

$$x^4 = a^2$$

$$x_1 = \sqrt{a}$$

$$x_2 = -\sqrt{a}$$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse genügt es sich auf die Stelle x_1 zu beschränken.

Ableitungen: $f'(x) = \dfrac{2x}{a} \qquad \Rightarrow \qquad m_f = f'(\sqrt{a}) = \dfrac{2\sqrt{a}}{a}$

$$g'(x) = \frac{-2a}{x^3} \qquad \Rightarrow \qquad m_g = g'(\sqrt{a}) = \frac{-2a}{a\sqrt{a}}$$

Die Tangenten sind senkrecht, wenn das Produkt der Steigungen -1 beträgt:

$$\frac{2\sqrt{a}}{a} \cdot \frac{-2a}{a\sqrt{a}} = -1$$

$$\frac{-4}{a} = -1$$

$$a = 4$$

Aufgabe A.4

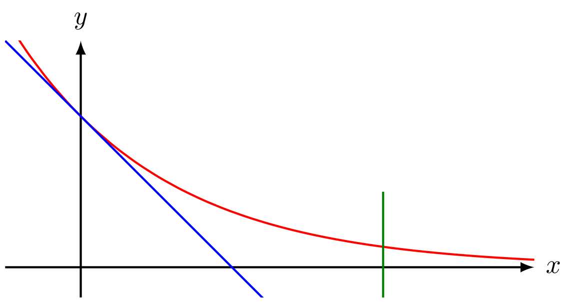
$f(x) = \mathrm{e}^{-1}$

(a) $x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(0) = \mathrm{e}^{-0} = 1$

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad m = f'(0) = -\mathrm{e}^{-0} = -1$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q$$
$$1 = -1 \cdot 0 + q$$
$$q = 1$$
$$t\colon y = -x + 1$$

(b) Skizze:



Nullstelle von t: $1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$$A_1 = \int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \big[-\mathrm{e}^{-x}\big]_0^2 = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^0 = 1 - \mathrm{e}^{-2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2}$$

Aufgabe A.5

(a) $f(x) = 5x^3 + \dfrac{1}{x^4} + \sqrt{x} - 4$

$f'(x) = 15x^2 - \dfrac{4}{x^5} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x}$

$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x}$

(c) $f(x) = \sin\big(\ln x^2\big)$

$f'(x) = \cos\big(\ln x^2\big) \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x} \cdot \cos\big(\ln x^2\big)$

(d) $f(x) = \cos(x) = f^{(0)}(x)$

$$\begin{array}{lll}
f^{(1)}(x) = -\sin(x) & f^{(5)}(x) = -\sin(x) & \ldots \quad f^{(45)}(x) = -\sin(x) \\
f^{(2)}(x) = -\cos(x) & f^{(6)}(x) = -\cos(x) & \quad\quad f^{(46)}(x) = -\cos(x) \\
f^{(3)}(x) = \sin(x) & f^{(7)}(x) = \sin(x) & \quad\quad f^{(47)}(x) = \sin(x) \\
f^{(4)}(x) = \cos(x) & f^{(8)}(x) = \cos(x) &
\end{array}$$

Aufgabe A.6

$f(x) = 3x - x^2 = x(3 - x) \quad \Rightarrow \quad$ Nullstellen: 0 und 3

- Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{2} \cdot (3 - x) \cdot y$
- Nebenbedingung: $y = 3x - x^2$
- Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:
  $A(x) = \frac{1}{2} \cdot (3 - x)(3x - x^2) = \frac{1}{2}\big(9x - 6x^2 + x^3\big)$
- Extremstellen bestimmen:
  $A'(x) = \frac{1}{2}(9 - 12x + 3x^2)$
  $A''(x) = \frac{1}{2}(-12x + 6x)$

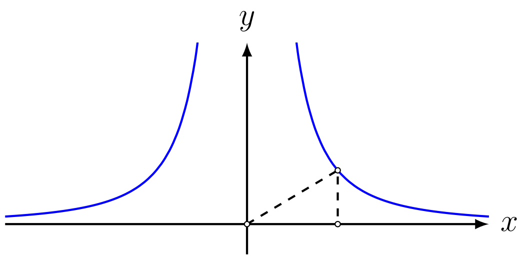
$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(9-12x+3x^2) &= 0\\
3x^2-12x+9 &= 0\\
x^2-4x+3 &= 0\\
(x-1)(x-3) &= 0\\
x_1 &= 1\\
x_2 &= 3
\end{aligned}$$

Im Falle von $x_2 = 3$ ist ABC kein Dreieck $\Rightarrow$ x_1 ist Kronfavorit.

Testen, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt:
$A''(1) = \frac{1}{2}(-12+6) = -3 < 0$
Bei x_2 liegt tatsächlich ein Maximum vor.

- Übrige (verlangte) Grössen bestimmen
  y-Koordinate von A: $y = f(1) = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad A(1, 2)$

Aufgabe A.7



Abstand eines Kurvenpunktes P zum Ursprung (Pythagoras)

$$d(x) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+\frac{4}{x^4}}$$

$d(x)$ ist genau dann minimal, wenn der Radikand $r(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^4}$ minimal wird.

$$\begin{aligned}
r'(x) &= 2x - \frac{16}{x^5}\\
0 &= 2x - \frac{16}{x^5}\\
\frac{16}{x^5} &= 2x\\
8 &= x^6\\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Könnte es auch ein lokales Maximum sein? Zum Testen die gewonnenen Werte in die 2. Ableitung einsetzen:

$r''(x) = 2 + \dfrac{80}{x^6} \quad \Rightarrow \quad r''(\pm\sqrt{2}) = 12 > 0$

$r(x)$ und $d(x)$ haben bei $x = \pm\sqrt{2}$ jeweils ein lokales Minimum.

y-Koordinaten: $y = \dfrac{2}{\left(\pm\sqrt{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow P_1\big(\sqrt{2}|1\big),\ P_2\big(-\sqrt{2}|1\big)$

Aufgabe A.8

Zielfunktion: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: $9^2 = r^2 + h^2$ (Satz von Pythagoras)

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:
$r^2 = 81 - h^2$
$V(h) = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\,\pi\,(81 - h^2)\, h = \frac{1}{3}\,\pi\,(81h - h^3)$
Maximum bestimmen: Zielfunktion $V(x)$ ableiten und Null setzen:

$$\begin{aligned} V'(h) &= 0 \\ \frac{1}{3}\,\pi\,(81 - 3h^2) &= 0 \\ 81 - 3h^2 &= 0 \\ 27 - h^2 &= 0 \\ h &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\,\text{cm} \end{aligned}$$

Test: $V''(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-6h) = -2\pi < 0$ (ok)

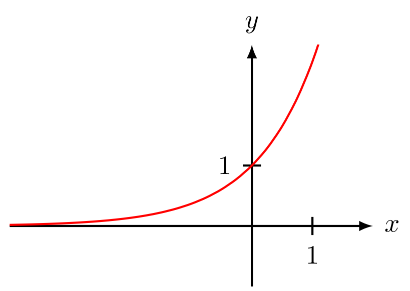
$h^2 = 81 - r^2 = 81 = 27 = 54 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}\,\text{cm}$

Aufgabe A.9

(a) Vor der Grenzwertbildung eine Termumformung durchführen:
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+5) = 7$$

(b) Das Monom mit dem grössten Exponenten suchen (x^3) und den Quotienten mit dessen Kehrwert erweitern:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{4x - 5x^3 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}(2x^3 - 4x^2 + 5)}{\frac{1}{x^3}(4x - 5x^3 - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 5 - \frac{1}{x^3}}$$
$$= \frac{2 - 0 + 0}{0 - 5 - 0} = -\frac{2}{5}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{z\to -\infty} \mathrm{e}^z = 0$ [wenn $x \to 0$, dann $z = -\frac{1}{x^2} \to -\infty$]



Aufgabe A.10

$p_1\colon y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

$p_2\colon y = 6 - x^2$

Schnittpunkte: $S_1(-2,2),\ S_2(2,2)$,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \left((6-x^2) - \left(\tfrac{1}{4}x^2+1\right)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^2 \left(-\tfrac{5}{4}x^2+5\right)\,\mathrm{d}x = 2\left[\tfrac{-5}{12}x^3+5x\right]_{x=0}^{x=2} \\ &= 2\left(\tfrac{-40}{12}+10\right) = 13\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe A.11

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x-3} \qquad f(1) = \frac{a+b}{-2} = -4 \Rightarrow a+b \overset{\mathrm{I}}{=} 8$$

$$f'(x) = \frac{2ax(x-3)-(ax^2+b)}{(x-3)^2} = \frac{2ax^2-6ax-ax^2-b}{(x-3)^2} = \frac{ax^2-6ax-b}{(x-3)^2}$$

$$f'(1) = \frac{a-6a-b}{4} = \frac{-5a-b}{4} - 3 \Rightarrow -5a-b \overset{\mathrm{II}}{=} -12$$

Lösung des Gleichungssystems aus I und II: $a=1,\ b=7$

Tangentengleichung:

$t\colon y = m\,x+q \quad\Rightarrow\quad -4 = -3\cdot 1+q \quad\Rightarrow\quad q=-1 \quad\Rightarrow\quad t\colon y=-3\,x-1$

Normalengleichung:

$n\colon y = -\frac{1}{m}\,x+q \quad\Rightarrow\quad -4 = \frac{1}{3}\cdot 1+q \quad\Rightarrow\quad q=-\frac{13}{3} \quad\Rightarrow\quad n\colon y=\frac{1}{3}\,x-\frac{13}{3}$

Aufgabe A.12

(a) Ansatz: $f\colon y = ax^2+b$ (die Symmetrie ist bereits im Ansatz berücksichtigt)

$A(0,0.8)$ liegt auf dem Graphen von f: $f(0)=0.8$ $\qquad a\cdot 0+b=0.8$

$B(1,0.6)$ liegt auf dem Graphen von f: $f(1)=0.6$ $\qquad a\cdot 1+b=0.6$

Lösung des Gleichungssystems: $a=-0.2,\ b=0.8 \Rightarrow f(x)=-0.2x^2+0.8$

(b) Volumen des Rotationskörpers

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{1}\left(-0.2x^2+0.8\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-1}^{1}\left(0.04x^4-0.32x^2+0.64\right)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{1}{125}x^5-\frac{8}{75}x^3+\frac{16}{25}x\right]_{-1}^{1} = \frac{406}{375}\pi\,\mathrm{VE} \end{aligned}$$

Aufgabe A.13

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{2x-3} = \cdots = \dfrac{1}{2}$ waagrechte Asymptote

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \cdots = 5$ Grenzwert an der Definitionslücke von f

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = \cdots = 3x^2$ Ableitung von $f(x) = x^3$

Aufgabe A.14

(a) Stetigkeit: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Anschaulich: Graph lässt sich zeichnen, ohne den Stift absetzen zu müssen

Differenzierbarkeit: Der Limes $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (Sekantensteigung) existiert.

Anschaulich: Graph hat keinen „Knick“

(b) stetig für alle $a \in \mathbb{R}$, denn $f(1) = a = \lim_{x\to 1} f(x)$

stetig und differenzierbar für $a = 3$

Aufgabe V.1

(a) Bedingung: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Also $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ t \end{pmatrix} = 10 - 7 + 3t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$

(b) Bedingung: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 11$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3+t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{7^2 + 6^2 + (3+t)^2} = 11$$

$85 + (3+t)^2 = 11^2 \quad \Rightarrow \quad (3+t)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3,\ t_2 = -9$

(c) $\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right| = 30$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ t \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} -t-21 \\ 15-2t \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -t-21 \\ 15-2t \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = (-t-21) \cdot 0 + (15-2t) \cdot t + 19 \cdot 2 = 30$$

$15t - 2t^2 + 38 = 30 \quad \Rightarrow \quad 2t^2 - 15t - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = 8$

Da das Vorzeichen des Spatproduktes etwas mit der Orientierung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und nichts mit der Volumenmasszahl des Spates zu tun hat, ist auch die Gleichung $15t - 2t^2 + 38 = -30$ möglich. Die Lösungen lauten dann $t_1 \approx 10.68$ und $t_2 \approx -3.18$

Aufgabe V.2

(a) $A(8,0,0)$, $B(0,-6,0)$, $C(0,0,1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -48 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon\colon 3x - 4y + 24z + D = 0$

$A(8,0,0) \in \varepsilon\colon 24 + D = 0 \Rightarrow D = -24$

$\varepsilon\colon 3x - 4y + 24z - 24 = 0$

(b) Die Geraden g und h schneiden sich offensichtich im Punkt $P(5,3,1)$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\delta\colon 3x - 2y + z + D = 0$

$P(5,3,1) \in \delta\colon 15 - 6 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -10$

$\delta\colon 3x - 2y + z - 10 = 0$

Aufgabe V.3

(a) $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \in \varepsilon(ABC) \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$

$\varepsilon\colon x - 2y + z = 0$

(b) *Lösung mit einer Hilfsebene:* Der geometrische Ort aller Punkte, welche von A und B gleichen Abstand haben, ist die Mittelnormalebene (die Mittelormalebene im Raum entspricht der Mittelsenkrechten in der Ebene).

Die Gleichung der Mittelnormalebene μ ist leicht zu bestimmen:

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der gesuchten Mittelnormalebene.

Der Mittelpunkt der Strecke von $A(2,2,2)$ nach $B(4,4,4)$ ist der Punkt $M(3,3,3)$ und liegt in der Mittelnormalebene μ.

$M \in \mu \quad \Rightarrow \quad 1\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 3+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-9 \quad \Rightarrow \quad \mu\colon x+y+z-9=0$

Da der gesuchte Punkt nicht nur gleiche Abstände von A und B haben soll, sonder auch auf der Gerade g liegen soll, müssen wir – um beide Bedingungen zu erfüllen – g mit μ schneiden.

Wir entnehmen der Geradengleichung $x = 2+t$, $y = 2$ und $z = 2$ und setzen dies in die Mittelnormalebene ein:

$(2+t)+2+2-9=0 \quad \Rightarrow \quad t=3$

Setzen wir $t = 3$ in g ein, erhalten wir den gesuchten Punkt $P(5, 2, 2)$

Lösung mit einer Abstandsgleichung: Wegen $P \in g$, gilt $P(x, y, z) = P(2+t, 2, 2)$

Es muss $|\overrightarrow{AP}| = |\overline{BP}|$ gelten.

$$\left|\begin{pmatrix}2+t\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2+t\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2+t\\-2\\-2\end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{t^2+0+0} = \sqrt{(-2+t)^2+4+4} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 12-4t+t^2 \quad \Rightarrow \quad t=3$$

Setzen wir $t = 3$ in g ein, erhalten wir den gesuchten Punkt $P(5, 2, 2)$

Aufgabe V.4

Normalenvektoren: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\varphi = \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$

Richtungsvektor der Schnittgeraden: $\vec{v} = \vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\varphi = \begin{pmatrix}-13\\15\\-6\end{pmatrix}$

Gemeinsamer Punkt auf ε und φ:

Setze $z = 0$: $2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

$3x + 2 - 0 - 11 = 0 \Rightarrow x = 3$

Gleichung der Schnittgeraden: $g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-13\\15\\-6\end{pmatrix}$

Aufgabe V.5

(a) $\varphi = \arccos \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \arccos \dfrac{8}{9} \approx 27.27^\circ$

(b) Beliebiger Punkt auf der Gerade g: $P(4+t|-1+t|2+3t)$

$$d(P, \varepsilon_1) = \frac{2\cdot(4+t)+2\cdot(-1+t)-(2+3t)+1}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{t+5}{3}$$

$$d(P,\varepsilon_2) = \frac{2\cdot(4+t)+(-1+t)-2\cdot(2+3t)-6}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{-3t-3}{3}$$

Da Abstände ein Vorzeichen haben können, ergeben sich folgende Gleichungen:

$d(P,\varepsilon_1) \overset{(1)}{=} d(P,\varepsilon_2)$ und $d(P,\varepsilon_1) \overset{(2)}{=} -d(P,\varepsilon_2)$

(1) $\Rightarrow \quad t+5=-3t-3 \quad \Rightarrow \quad t=-2 \quad \Rightarrow \quad P_1(2|-3|-4)$

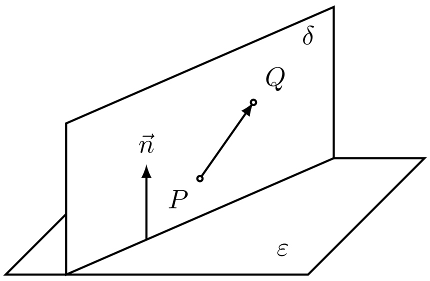
(2) $\Rightarrow \quad t+5=3t+3 \quad \Rightarrow \quad t=1 \quad \Rightarrow \quad P_2(5|0|5)$

Aufgabe V.6

(a) $d(P,\varepsilon) = \dfrac{|4\cdot 1+7\cdot(-10)+4\cdot 1-19|}{\sqrt{4^2+7^2+4^2}} = \dfrac{81}{9} = 9$

(b) Wir erhalten einen Normalenvektor der Ebene δ (nicht eingezeichnet), indem wir das Vektorprodukt des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PQ}$ und des Normalenvektors $\vec{n}_\varepsilon$ der Ebene ε bilden.

$$\vec{n}_\varepsilon \times \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$



$P(1,-10,1) \in \delta \quad \Rightarrow \quad -1\cdot 1+(-10)\cdot 0+1\cdot 1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=0$

$\delta\colon\ -x+z=0$

Aufgabe V.7

(a) Da die Ebene senkrecht zur Gerade stehen soll, ist der Richtungsvektor Gerade ein Normalenvektor der gesuchten Ebene: $x-2y+2z+D=0$

Da der Punkt $P(8,6,-5)$ in der Ebene liegen soll, müssen seine Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen. Auf diese Weise kann der Wert von D bestimmt werden:

$8-2\cdot 6+2\cdot(-5)+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=14 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon x-2y+2z+14=0$

(b) $d(P,g) = \left|\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\6\\-5\end{pmatrix}\right| = 9 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{pmatrix}-3+t\\-9-2t\\6+2t\end{pmatrix}\right| = 9$

$(-3+t)^2+(-9-2t)^2+(6+2t)^2=81 \quad \Rightarrow \quad 9t^2+54t+126=81$

$$\Rightarrow \quad t^2 + 6t + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t+1)(t+5) = 0$$

$t_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P_1(4,-1,-1)$

$t_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad P_2(0,7,-9)$

Aufgabe S.1

E: mindestens 3 Würfel zeigen die Eins

F: Augensumme = 8

(a) 3 Würfel zeigen die Eins: $p_3 = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0322$

4 Würfel zeigen die Eins: $p_4 = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 0.0032$

5 Würfel zeigen die Eins: $p_5 = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0.0001$

$P(E) = p_3 + p_4 + p_5 = 0.0355$

(b) Summe 8

Augenzahlen	Wahrscheinlichkeit	Häufigkeit
1, 1, 1, 1, 4	$(\frac{1}{6})^5$	5
1, 1, 1, 2, 3	$(\frac{1}{6})^5$	$\frac{5!}{3!} = 20$
1, 1, 2, 2, 2	$(\frac{1}{6})^5$	$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$

$$P(F) = 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 + 20 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 + 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$P(F) = 0.0006 + 0.0026 + 0.0013 = 0.0045$

(c) $P(E\,|\,F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0.0006 + 0.0026}{0.0045} = 0.711$

(d) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$P(E \cup F) = 0.0355 + 0.0045 - 0.0032 = 0.0368$

Aufgabe S.2

(a) $P_8(\text{mindestens eine rote Kugel}) = 1 - P_8(\text{keine rote Kugel}) = 1 - 0.6^8 \approx 0.9832$

(b) $P_8(\text{3 rote Kugeln}) = \binom{8}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^5 \approx 0.2787$

(c) $P_8^*(\text{3 rote Kugeln}) = \dfrac{\binom{40}{3} \cdot \binom{60}{5}}{\binom{100}{8}}$

(d) Da sich beim Ziehen ohne Zurücklegen mit jedem Zug die Anzahl der Kugeln verringert, verändern sich nach jedem Zug die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer roten bzw. einer weissen Kugel. Bei einer relativ grossen Anzahl Kugeln und einer relativ kleinen Anzahl Ziehungen, wie es in dieser Aufgabe der Fall ist, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten nur wenig und das Schlussresultat ist fast dasselbe.

Aufgabe S.3

x: Anzahl roter Kugeln = Anzahl schwarzer Kugeln

$$\frac{x}{2x} \cdot \frac{x-1}{2x-1} = \frac{7}{29}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2x-1} = \frac{7}{29}$$
$$29x - 29 = 28x - 14$$
$$x = 15$$

Es befinden sich 30 Karten im Spiel.

Aufgabe S.4

(a) Wenn alle Personen in verschiedenen Etagen den Lift verlassen sollen, hat die erste Person sechs, die zweite fünf, die dritte vier und die letzte noch drei günstige Auswahlmöglichkeiten. Da es insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ Ausstiegsszenarien gibt, erhalten wir mit der Formel „Günstige über Mögliche“

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}$$

(b) Die vier Personen können auf genau eine Art den Lift in einem Stockwerk verlassen. Dies kann auf insgesamt 6 Stockwerken geschehen. Also

$$p = \frac{1}{6^4} \cdot 6 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

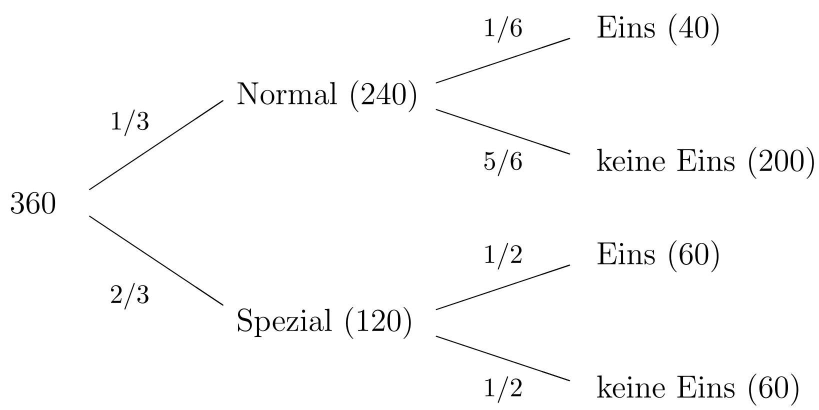
(c) Hier handelt es sich um das Gegenereignis von Aufgabe (a). Somit

$$p = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

Aufgabe S.5

(a) $P(311) + P(131) + P(221) + P(212) + P(122) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{72}$

(b) Zum besseren Verständnis führen wir den Versuch 360 mal durch, und halten die „mittlere“ Anzahl der entsprechenden Resultate in einem Baumdiagramm fest.



Die gegebenen (bedingten!) Wahrscheinlichkeiten erlauben es uns zunächst nur, vom bedingenden Ereignis (*Normalwürfel* oder *Spezialwürfel*) auf das bedingte Ereignis (*Eins* oder *nicht Eins*) zu schliessen:

$P(\text{Eins}|\text{Normalwürfel}) = \frac{1}{6}$ und $P(\text{Eins}|\text{Spezialwürfel}) = \frac{1}{2}$

Die in der Aufgabe gefragte Wahrscheinlichkeit erfordert aber einen Kausalitätswechsel: Wir wollen wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit aus dem Ereignis *Eins* das Ereignis *Spezialwürfel* folgt.

$$P(\text{Spezialwürfel}|\text{Eins}) = \frac{P(\text{Spezialwürfel} \cap \text{Eins})}{\text{Eins}} = \frac{60}{60+40} = 0.6$$

Aufgabe S.6

(a) $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

(b) Die Deutschen können die Plätze auf 3!, die Engländer auf 2! und die Franzosen auf 4! Arten untereinander tauschen. Die drei Nationalitäten können wiederum auf 3! Arten angeordnet werden. Also $3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3! = 1728$

(c) Bei der zuerst gewählten Person kommt es nicht darauf an, wer sie ist. Die zweite gezogene Person muss der Ehepartner der ersten Person sein. Also $p = \frac{12}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$.

Oder: Es gibt $g = 12$ günstige Fälle (die Ehepaare) auf $11 \cdot 12$ mögliche Ziehungen: $p = \frac{12}{11 \cdot 12} = \frac{1}{11}$.

(d) Der Einlauf erfolgt in *einer* ganz bestimmten Reihenfolge.

günstiger Fall: $g = 1$
mögliche Fälle: $m = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$

$$p = \frac{1}{3360} \approx 0.000298$$

Aufgabe S.7

(a) An der erste Stelle (zum Beispiel ganz links) kann eines von 30 Büchern stehen.

An der zweiten Stelle kann eines von 29 Büchern stehen.

...

An der zweitletzten Stelle kann eines von 2 Büchern stehen.

An der letzten Stelle muss das letzte Buch stehen.

Also gibt es $30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 30!$ Möglichkeiten.

(b) Analog zu (a):

Die Bücher der Büchergruppe A können auf 10! Arten angeordnet werden.

Die Bücher der Büchergruppe B können auf 15! Arten angeordnet werden.

Die Bücher der Büchergruppe C können auf 5! Arten angeordnet werden.

Die drei Büchergruppen als Ganzes können auf 3! Arten angeordnet werden.

Also gibt es $10! \cdot 15! \cdot 5! \cdot 3!$ Möglichkeiten.

(c) Es können auf $\binom{10}{2}$ Arten zwei Bücher aus der Gruppe A ausgewählt werden.

Es können auf $\binom{15}{2}$ Arten zwei Bücher aus der Gruppe B ausgewählt werden.

Es können auf $\binom{5}{2}$ Arten zwei Bücher aus der Gruppe C ausgewählt werden.

Da sie aus jeder Gruppe 2 Bücher wählt, gibt es insgesamt $\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{2} \cdot \binom{5}{2}$ Möglichkeiten.

(d) Für das erste Buch gibt es zwei Verteilungsmöglichkeiten.

Für das zweite Buch gibt es zwei Verteilungsmöglichkeiten.

...

Für das dreissigste Buch gibt es zwei Verteilungsmöglichkeiten.

Also gibt es $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{30}$ Möglichkeiten.