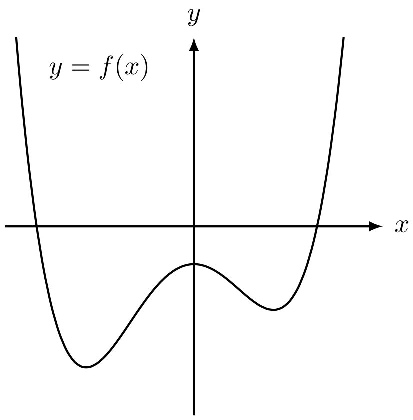
Aufgabe A.1

(a) Zeichne zum unten abgebildeten Graphen einer Funktion f den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem.



(b) Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + x$ an der Stelle $x = 1$ mit Hilfe des Differenzialquotienten.

Aufgabe A.2

In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + 4x - 3$ und $g(x) = x^2 + 2x - 6$?

Aufgabe A.3

Gegeben sind die Funktionen mit den Gleichungen $f(x) = \dfrac{x^2}{a}$ und $g(x) = \dfrac{a}{x^2}$.

Für welchen Wert von a schneiden sich die Graphen der Funktionen rechtwinklig?

Aufgabe A.4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ mit ihrem Graphen G_f.

(a) Bestimme die Gleichung der Tangente t an G_f an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) G_f schliesst mit der Tangente t, der x-Achse und der Geraden $x = 2$ ein endliches Flächenstück ein. Wie gross ist sein Flächeninhalt?

Aufgabe A.5

Bestimme die angegebene Ableitung und vereinfache den Term.

(a) $f(x) = 5x^3 + \dfrac{1}{x^4} + \sqrt{x} - 4$

$f'(x) =$

(b) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{3x}$

$f'(x) =$

(c) $f(x) = \sin\left(\ln x^2\right)$

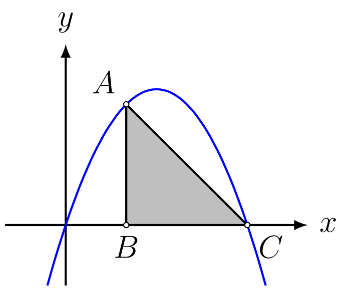
$f'(x) =$

(d) $f(x) = \cos(x)$

$f^{(47)}(x) =$

Aufgabe A.6

Die Punkte $A(x, y)$, $C(?, 0)$ liegen auf dem Graphen der Funktion $f\colon y = 3x - x^2$. Zusammen mit dem Punkt $B(x, 0)$ bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Bild).



Bestimme die Koordinaten von A so, dass ABC maximalen Flächeninhalt hat.

Aufgabe A.7

Für welche Punkte auf der Kurve $y = \dfrac{2}{x^2}$ ist der Abstand zum Ursprung minimal?

Aufgabe A.8

Bestimme Höhe h und Radius r eines geraden Kreiskegels, der bei einer Mantellinie der Länge $s = 9$ cm ein maximales Volumen hat.

Aufgabe A.9

(a) Berechne $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$.

(b) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-4x^2+5}{4x-5x^3-1}$.

(c) Berechne $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe A.10

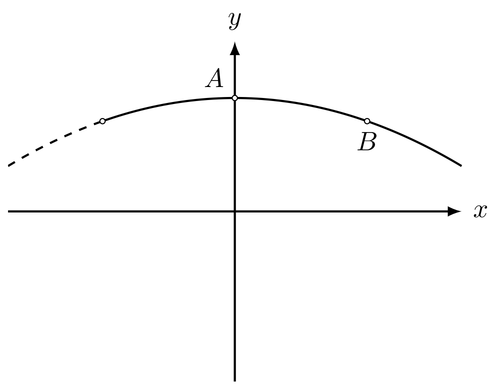
Berechne die von den Parabeln $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ und $y = 6 - x^2$ eingeschlossene Fläche.

Aufgabe A.11

Der Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x-3}$ besitzt in $P(1,-4)$ die Steigung $m = -3$. Bestimme a und b sowie die Gleichungen der Tangente und der Normalen in P.

Aufgabe A.12

Wenn das in der Zeichnung abgebildete und zur y-Achse symmetrische Parabelstück um die x-Achse rotiert, entsteht ein liegendes Fass.



(a) Wie lauet die Gleichung der Parabel, wenn $A(0, 0.8)$ und $B(1, 0.6)$?

(b) Welches Volumen hat das Fass?

Aufgabe A.13

Bestimme die Grenzwerte und erkläre ihre Bedeutung

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{2x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ (c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

Aufgabe A.14

(a) Erkläre die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion.

(b) Für welche Werte a ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig und differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{für } x > 1 \\ \frac{1}{4}(3x^2 + 4a - 3) & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

Aufgabe V.1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Für welchen Wert von t stehen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander?

(b) Für welchen Wert von t hat der Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ die Länge 11?

(c) Für welchen Wert von t hat der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Spat ein Volumen von 30?

Aufgabe V.2

(a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene mit den Achsenabschnitten $a = 8$, $b = -6$, $c = 1$

(b) Bestimme die Koordinatengleichung der von

$$g\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Ebene.

Aufgabe V.3

Gegeben sind die Punkte $A(2, 2, 2)$, $B(4, 4, 4)$ und $C(3, 4, 5)$.

(a) Bestimme eine Gleichung der Ebene, die durch die Punkte A, B und C geht.

(b) Welcher Punkt P auf der Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat den gleichen Abstand von A und B?

Aufgabe V.4

Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden der Ebenen ε und φ:

$$\varepsilon\colon\ 2y + 5z - 4 = 0\,, \qquad \varphi\colon\ 3x + y - 4z - 11 = 0$$

Aufgabe V.5

Gegeben sind die Ebenen $\varepsilon_1\colon\ 2x + 2y - z + 1 = 0$ und $\varepsilon_2\colon\ 2x + y - 2z - 6 = 0$.

(a) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?

(b) Welche Punkte auf der Geraden $g\colon\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ haben den gleichen Abstand von ε_1 und ε_2?

Aufgabe V.6

Gegeben sind die Ebene $\varepsilon\colon\ 4x + 7y + 4z - 19 = 0$ und der Punkt $P(1, -10, 1)$.

(a) Welchen Abstand hat der Punkt P von der Ebene ε?

(b) Die Ebene δ geht durch die Punkte P und $Q(2, -9, 2)$ und steht senkrecht auf der Ebene ε. Bestimme eine Koordinatengleichung von δ.

Aufgabe V.7

Gegeben ist die Gerade $g\colon\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(8, 6, -5)$.

(a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene ε, die senkrecht zur Gerade g steht und durch den Punkt P geht.

(b) Welche Punkte der Gerade g haben vom Punkt P eine Entfernung von 9 Längeneinheiten?

Aufgabe S.1

Fünf ideale Würfel werden geworfen. Es bezeichne E das Ereignis „mindestens drei Würfel zeigen die Eins“ und F das Ereignis „Augensumme = 8“. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

(a) $P(E) =?$ (b) $P(F) =?$ (c) $P(E \,|\, F) =?$ (d) $P(E \cup F) =?$

Aufgabe S.2

In einer Urne liegen 40 rote und 60 weisse Kugeln. Wir ziehen daraus zufällig 8 Kugeln, wobei die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne zurückgelegt wird.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den gezogenen Kugeln mindestens eine rote befinden.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den gezogenen Kugeln genau 3 rote befinden.

(c) Beantworte die Frage (b) unter der Voraussetzung, dass die 8 Kugeln *ohne Zurücklegen* gezogen werden.

(d) Warum ist der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten in (b) und in (c) relativ klein?

Aufgabe S.3

Ein Kartenspiel bestehe zur Hälfte aus roten und zur anderen Hälfte aus schwarzen Karten. Die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zwei rote Karten zu ziehen beträgt $\frac{7}{29}$. Wie viele Karten hat das Spiel?

Aufgabe S.4

In einem Aufzug, der noch 6 Stockwerke fährt, sind 4 Personen, die unabhängig voneinander aussteigen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) alle in verschiedenen Stockwerken

(b) alle im gleichen Stockwerk

(c) mindestens zwei im gleichen Stockwerk

aussteigen?

Aufgabe S.5

In einem Würfelbecher befinden sich zwei ganz normale Spielwürfel und ein dritter Spezialwürfel mit den Augenzahlen 1, 1, 1, 2, 2, 2.

(a) Alle drei Würfel werden gemeinsam geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der Augenzahlen 5?

(b) Jemand wählt zufällig einen der drei Würfel aus und würfelt einmal damit. Der Würfel zeigt eine Eins. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um den Spezialwürfel?

Aufgabe S.6

(a) Wie viele Möglichkeiten hast du, 3 Bücher aus insgesamt 8 verschiedenen Büchern auszuwählen?

(b) Drei Deutsche, zwei Engländer und vier Franzosen sollen so auf eine Bank verteilt werden, dass Personen gleicher Nationalität nebeneinander sitzen. Berechne die Anzahl der möglichen Sitzordungen.

(c) Aus 6 Ehepaaren werden zufällig zwei Personen gewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein verheiratetes Paar ausgewählt wird?

(d) An einem Pferderennen nehmen 16 Pferde teil. Wie gross ist für einen Unkundigen die Wahrscheinlichekeit, die ersten drei Pferde in der Reihenfolge des Einlaufens richtig zu tippen?

Aufgabe S.7

Ingas Schulbücher:

Gruppe A:	Grammatik und Literatur zu den Fremdsprachen:	10 Bücher
Gruppe B:	Deutsche Literatur	15 Bücher
Gruppe C:	Naturwissenschaften und Mathematik	5 Bücher

(a) Auf wie viele Arten kann Inga die 30 Bücher nebeneinander auf ein Regalbrett ihres Bücherregals stellen?

(b) Auf wie viele Arten kann Inga die 30 Bücher nebeneinander auf ein Regalbrett ihres Bücherregals stellen, wenn die Bücher der gleichen Gruppe nebeneinander stehen sollen?

(c) Um für die Matura zu lernen, wählt Inga zufällig 2 Bücher aus jeder Gruppe aus. Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat sie?

(d) Nach der Matura verlost Inga alle 30 Bücher einzeln unter ihren zwei jüngeren Geschwistern. Auf wie viele Arten können so die Bücher verteilt werden?