Aufgabe 1

Es gibt 9 Ziffern, wenn man die Null weglässt und damit $9^5 = 59\,049$ fünfstellige Zahlen.

Aufgabe 2

Das Wort RHODODENDRON besteht aus insgesamt 12 Buchstaben, wobei die Buchstaben D und O dreifach und die Buchstaben N und R doppelt vorkommen. Somit ergeben sich

$\dfrac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = 3\,326\,400$ Wörter

Aufgabe 3

(a) 3 Autos auf 6 Parkplätze verteilen: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Parkiermöglichkeiten

(b) 6 Parkplätze auf 8 Autos verteilen: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$ Parkiermöglichkeiten

Aufgabe 4

(a) $(n+1)n! = (n+1)!$

(b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

(c) $n! + (n+1)! = n! + (n+1)n! = n!(1 + (n+1)) = (n+2)n!$

Aufgabe 5

(a) Die drei Amerikaner können auf 3! Arten nebeneinander sitzen.

Die fünf Franzosen können auf 5! Arten nebeneinander sitzen.

Die fünf Schweizer können auf 5! Arten nebeneinander sitzen.

Die zwei Italiener können auf 2! Arten nebeneinander sitzen.

Berücksichtigt man alle 4! Permutationen der vier Gruppen, erhält man:

$4! \cdot (3! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 2!) = 4\,147\,200$ Möglichkeiten

(b) Die Permutationen innerhalb der Nationengruppen sind mit denen in (a) identisch. Bei einem runden Tisch spielt jedoch nur die relative Lage eine Rolle. Wählt man willkürlich eine Nation aus, so gibt es 3! Möglichkeiten die übrigen Nationen rechts (bzw. links) davon zu platzieren. Also:

$3! \cdot (3! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 2!) = 1\,036\,800$ Möglichkeiten

Aufgabe 6

(a) $\binom{19}{5} = 11\,628$

(b) Wenn Dominik und Lena dabei sein müssen, stehen nur noch $19 - 2 = 17$ Schüler zur Auswahl. Darüber hinaus müssen jetzt nur noch $5 - 2 = 3$ Schüler ausgewählt werden. Somit:

$$\binom{19-2}{5-2} = \binom{17}{3} = 680.$$

Aufgabe 7

Der erste Spieler erhält 9 von 36 Karten, der zweite 9 aus den verbleibenden 27 Karten, der dritte 9 aus den restlichen 18 Karten und der letzte Spieler bekommt die 9 übrig bleibenden 9 Karten.

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} \approx 2.145 \cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten}$$

Der letzte Faktor (=1) kann natürlich weggelassen werden.

Aufgabe 8

(a) Ein „Trennwand-Problem“: $AA|AAA|AA$, usw.: $\binom{7+2}{2} = 36$ Möglichkeiten

(b) Lege in jede der drei Schalen genau einen Apfel; dann ist keine Schale leer. Verteile die restlichen $7 - 3 = 4$ Äpfel nach dem Verfahren in (a): $\binom{4+2}{2} = 15$ Mögl.

Aufgabe 9

$$\frac{89!}{87!} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{87 \cdot 86 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = 89 \cdot 88 = 7832$$

Aufgabe 10

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Möglichkeiten

Aufgabe 11

$11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Möglichkeiten

Aufgabe 12

$11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Möglichkeiten

Aufgabe 13

Auf $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Arten

Aufgabe 14

Erhält jede Person genau ein Geschenk, dann sind noch 2 Geschenke auf 4 Personen zu verteilen ($G|\,|\,|G,\ |GG|\,|\,, \ldots$): $\binom{2+3}{3} = \binom{5}{3} = 10$

Aufgabe 15

Auf $10! = 3\,628\,800$ Arten

Aufgabe 16

Wären alle Ziffern verschieden, so gäbe es $6! = 720$ Zahlen. Da die Ziffer „5“ dreimal und die Ziffer „6“ zweimal vorkommt, können wir jeweils $3! \cdot 2! = 12$ Zahlen nicht unterscheiden. Also:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{12} = 60 \text{ Zahlen}$$