Integralrechnung

Übungen

Version vom 21. August 2022

Aufgabe 1.1

Berechne den Wert der bestimmten Integrale mit einem Taschenrechnerprogramm.

(a) $\displaystyle\int_2^5 (2x+3)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 1.2

(a) Skizziere die Funktion $f(x) = \sin(x)$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ in ein Koordinatensystem mit folgenden Längeneinheiten:

x-Achse: 6 Häuschen entsprechen π Einheiten
y-Achse: 2 Häuschen entsprechen 1 Einheit

(b) Bestimme

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$

(c) Wie erklärst du dir das letzte Resultat in (b)?

(d) Welchen Inhalt hat die Fläche, die von der Sinuskurve, der x-Achse und den Grenzen $a = 0$ und $b = 2\pi$ eingeschlossen wird, wirklich?

Aufgabe 1.3

Was geschieht bei der Berechnung des bestimmten Integrals, wenn man die obere mit der unteren Grenze vertauscht? Überprüfe deine Vermutung mit folgendem Beispiel:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_2^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 1.4

Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der Parabel $f(x) = -x^2 + x + 6$ und der x-Achse eingeschlossen wird. *Hinweis:* Skizziere die Funktion und bestimme die passenden Grenzen.

Aufgabe 2.1

$$\int x^{10}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.2

$$\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.3

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.4

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.5

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.6

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.7

$$\int 1\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.8

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.9

$$\int \ln|x|\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.10

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.11

$$\int (x^2 + x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.12

$$\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.13

$$\int (x^5 - x^3 + 2)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.14

$$\int (x-3)(x+4)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.15

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.16

$$\int \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.17

$$\int 5x^4\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.18

$$\int -4\sin x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.19

$$\int 7\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.20

$$\int (x-2)^2\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.21

$$\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.22

$$\int \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.23

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.24

$$\int (3\cos x - \tan x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.25

$$\int (2x^4 - 3)^2\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.26

$$\int \sqrt{5x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.27

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.28

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.29

$$\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.30

$$\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.31

$$\int_2^4 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.32

$$\int_1^3 \left(x^2-4x\right)^2 \mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.33

$$\int_2^4 x^5(2x+5) \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.34

Für welches k gilt $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(3x^2-kx+k\right) \mathrm{d}x = -2$?

Aufgabe 2.35

Für welche reelle Zahl b gilt $\displaystyle\int_1^b (x^2+x+1) \,\mathrm{d}x = 144$?

Aufgabe 2.36

$$\int_0^4 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.37

$$\int_0^1 5x\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.38

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.39

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.40

$$\int_1^2 \frac{2}{x} \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.41

$$\int_2^3 \frac{x^2+4x+3}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2.42

Bestimme aus $f'(x) = 3x^2 - 4$ und $f(5) = 54$ die Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 2.43

Bestimme aus $g'(x) = 5 - x$ und $g(-2) = -g(2)$ die Funktionsgleichung von g.

Aufgabe 2.44

Bestimme aus $f''(x) = 2x$, $f'(2) = 5$ und $f(1) = 3$ die Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 2.45

Bestimme aus $f''(x) = x^2 - 1$, $f'(0) = 4$ und $f(0) = 0$ die Funktionsgleichung von f.

Substitution

Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4\cdot\ln|x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.4

$$\int_{-2}^0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.5

$$\int \ln|5x|\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.6

$$\int_1^2 (2x-1)^3\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.7

$$\int x^2\,\sin(x^3)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.9

$$\int \frac{6}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3.11

$$\int \sqrt[3]{(3x-8)^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.13

$$\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.14

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.15

$$\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.16

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.17 ($\star$)

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.18 ($\star$)

$$\int \frac{3+2t}{5+2t}\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3.19

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.20

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.21 ($\star$)

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Typ 2)}$$

Aufgabe 3.22 ($\star$)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Typ 2)}$$

Aufgabe 3.23 ($\star$)

$$\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Typ 2)}$$

Partielle Integration

Aufgabe 3.24

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.25

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.26

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.27

$$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.28

$$\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad \text{(FS)}$$

Aufgabe 3.29

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.30

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \ln |x| \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.31

$$\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.32

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.33

$$\int x^4 \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(FS)}$$

Aufgabe 3.34

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(FS)}$$

Aufgabe 3.35

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(FS)}$$

Aufgabe 3.36

$$\int \mathrm{e}^{2x}(2x^2 + 4x - 5) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(FS)}$$

Vermischte Beispiele

Aufgabe 3.37

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.38

$$\int_0^1 (4x+1)^3 \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.39

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.40

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.41

$$\int_{-1}^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^{(x^3)} \mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.42

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.43

$$\int_1^2 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.44

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.45

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3.46 ($\star$)

$$\int \arccos x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(Herleitung)}$$

Aufgabe 4.1

Welchen Inhalt hat das endliche Flächenstück, das von der x-Achse und der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 6x - 3x^2$ eingeschlossen wird?

Aufgabe 4.2

Berechne den Gesamtinhalt der endlichen Flächenstücke, die von dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ und der x-Achse begrenzt werden.

Aufgabe 4.3

Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = (x-4)^2$ sowie der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 4.4

Zeige, dass sich die Graphen der Funktionen $f(x) = 2 + x^2$ und $g(x) = 4x - x^2$ in einen Punkt berühren und berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die Funktionsgraphen und die y-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 4.5

Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die Graphen der Funktionen $f(x) = -3x^2 + x + 4$ und $g(x) = x + 1$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 4.6

Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die Graphen der Funktionen $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 4x + 4$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 4.7

Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das durch die x-Achse und die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ sowie $g(x) = x - 2$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 4.8

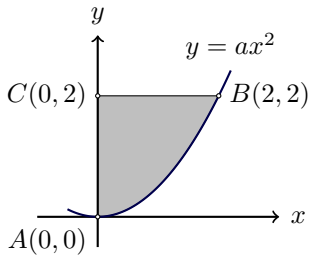
Wie gross ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x + 4/x^2$, den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 4$ sowie der schiefen Asymptote der Funktion begrenzt wird?

Aufgabe 4.9

Wie gross ist die Fläche, die die Parabel p: $y = x^2$ ihrer Tangente t im Punkt $P(2, 4)$ und die x-Achse einschliessen?

Aufgabe 4.10

Bestimme die Gleichung der Parabel in der Abbildung und berechne den Flächeninhalt des grau hervorgehobenen Flächenstücks ABC.



Aufgabe 4.11

Welche Gerade $x = m$ zerlegt die Fläche zwischen der Kurve $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$, der x-Achse und den Grenzen $x = 0$ und $x = 2$ in zwei inhaltsgleiche Teile?

Aufgabe 4.12

Berechne den Inhalt der endlichen Fläche, die von der Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) = 4/x^2 - 1$ und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzt werden.

Aufgabe 4.13

Welchen Gesamtinhalt haben die Flächenstücke, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + x - 2$ umschlossen werden?

Aufgabe 4.14

Wie muss der Parameter $p > 0$ gewählt werden, damit die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = px^2 - x^3$ eingeschlossene Fläche den Inhalt $A = \frac{4}{3}$ hat?

Aufgabe 4.15

Bestimme die Gleichung der Ursprungsgerade, welche die Fläche zwischen der Parabel mit der Gleichung $y = 4x - x^2$ und der x-Achse halbiert.

Aufgabe 5.1

Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 4)$ über dem Intervall $I = [-2, 2]$ rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 5.2

Der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ über dem Intervall $I = [a, b]$ (mit $0 < a$) rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 5.3

Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das Kurvenstück mit der Gleichung $y^2 = 2x + 3$ über dem Intervall $I = [0, 3]$

(a) um die x-Achse,

(b) um die y-Achse

rotiert.

Aufgabe 5.4

Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das Kurvenstück mit der Gleichung $x^2 - 4y^2 = 16$ über dem Intervall $I = [-8, 8]$

(a) um die x-Achse,

(b) um die y-Achse

rotiert.

Aufgabe 5.5

Berechne das Volumen des Rotationsellipsoides, der entsteht, wenn die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5.6

Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2/x - 1$ begrenzen zusammen mit der positiven x-Achse ein endliches Flächenstück. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert?

Aufgabe 5.7

Das endliche Flächenstück, das von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 6$ und $g(x) = -x^2 + 10$ begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Welches Volumen hat dieser Rotationskörper?

Aufgabe 5.8

Die Graphen der Funktionen $f(x) = 1+\sin(x)$ und $g(x) = 1+\cos(x)$ begrenzen kongruente Flächenstücke. Eines davon rotiert um die x-Achse. Welches Volumen hat der entstehende Körper?

Aufgabe 5.9

Wenn der Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0, R)$ und dem Radius r $(0 < r < R)$ um die x-Achse rotiert, entsteht ein Torus. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 5.10

Wenn eine zur y-Achse symmetrische Parabel um die x-Achse gedreht wird, entsteht ein Fass der Höhe 1 m, das an der dicksten Stelle einen Radius von 30 cm und am Boden sowie am Deckel einen Radius von 20 cm hat. Berechne das Volumen des Fasses in Litern.

Aufgabe 5.11

Leite die Formel für die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius r und der Höhe h mittels eines Integrals her.

Aufgabe 5.12

Leite die Formel für die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit dem Radius r und der Höhe h mittels eines Integrals her.

Aufgabe 5.13

Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3$ rotiert für $0 \leq x \leq \sqrt[4]{32}$ um die x-Achse. Berechne die Mantelfläche dieses Rotationskörpers.

Aufgabe 4.1

Berechne die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.1}}\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{4+t}{t^3}\mathrm{d}t$

Aufgabe 4.2

Berechne die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u$

(d) $\displaystyle\int_0^8 u^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}u$

Aufgabe 4.3

Berechne die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$

Aufgabe 4.4

Berechne die uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(y+1)^3} \mathrm{d}y$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{z+1} \mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{z^2+1} \mathrm{d}z$