Integralrechnung (Rotationskörper)Lösungen+ Volumen und Mantelflächen

Aufgabe 1

$y(x) = \dfrac{1}{x} \qquad (0 < a \leq x \leq b)$

$$V = \pi \int_a^b \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \pi\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) = \pi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

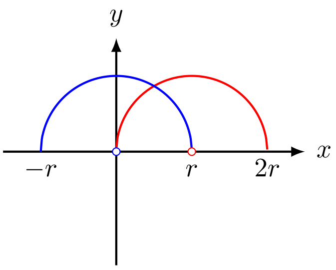
Aufgabe 2

$k\colon\, y = \sqrt{2rx - x^2} \qquad (0 \leq x \leq 2r)$

$$V = \pi \int_0^{2r} \left(\sqrt{2rx-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^{2r} \left(2rx - x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left[rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{2r} = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Die Kurve k ist ein um r in x-Richtung verschobener Halbkreis:

$y = \sqrt{2rx - x^2} \quad \overset{x \to x+r}{\Rightarrow} \quad y = \sqrt{2r(x+r) - (x+r)^2} = \cdots = \sqrt{r^2 - x^2}$



Aufgabe 3

$k\colon\, y = \cos(2x) \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$

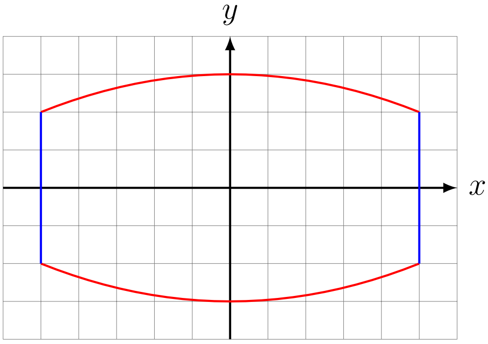
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos(2x)\right)^2 \mathrm{d}x = \dots$$

Substitution: $u(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$ (Grenzen anpassen!)

$$\dots = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u \overset{(*)}{=} \tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\left[u + \sin(u)\cos(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{8}\pi^2$$

$(*)$ FTB auf Seite 74 oben

Aufgabe 5



Ansatz: $f(x) = ax^2 + b$ (Symmetrie berücksichtigen)

$f(0) = 3 = b$

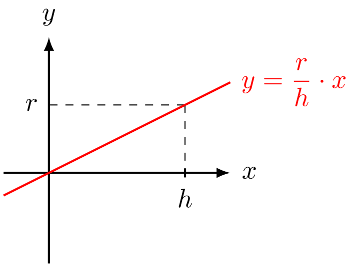
$f(5) = 2 = 25a + 3 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3 - \frac{1}{25}x^2$

$$V = 2\pi \int_0^5 \left(3 - \tfrac{1}{25}x^2\right)^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^5 \left(9 - \tfrac{6}{25}x^2 + \tfrac{1}{625}x^4\right) \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[9x - \tfrac{2}{25}x^3 + \tfrac{1}{3125}x^5\right]_0^5 = 2\pi[45 - 10 + 1] = 72\pi \,\mathrm{dm}^3 \approx 226.19\,\text{Liter}$$

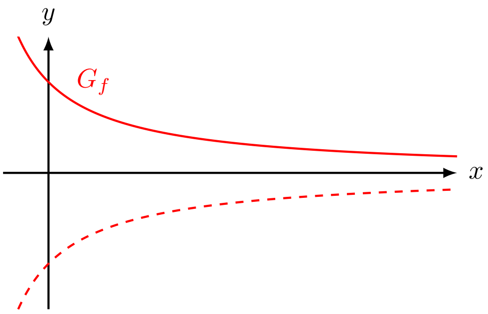
Aufgabe 6

Ein gerader Kreiskegel mit Grundkreisradius r und Höhe h kann als Drehkörper einer Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = r/h$ erzeugt werden.



$$V_{\text{Kegel}} = \pi \int_0^h f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{r^2\pi}{h^2} \int_0^h x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{r^2\pi}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{r^2\pi}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Aufgabe 7



$$V_b = \pi \int_0^b \left(\frac{4}{x+2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^b \frac{16}{(x+2)^2} \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{-16}{x+2}\right]_0^b = \pi \left(\frac{-16}{b+2} + 8\right) \xrightarrow{b\to\infty} 8\pi = V$$

Aufgabe 8

$$y(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 3x^2$$

$$M = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4}\, \mathrm{d}x = \dots$$

$$u = 1 + 9x^4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 36x^3\, \mathrm{d}x$$

$$\dots = 2\pi \int_1^{10} x^3 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{36x^3}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{18} \int_1^{10} \sqrt{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\big(10\sqrt{10} - 1\big)$$

Aufgabe 9

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big)$$

$$\begin{aligned}
M &= 2\pi \int_{-3}^3 \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big)^2}\, \mathrm{d}x = \pi \int_{-3}^3 \big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)\sqrt{\tfrac{4}{4} + \tfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\big)}\, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^3 \big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)\sqrt{\tfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}\big)}\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)\sqrt{\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^3 \big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \big(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}\big)\, \mathrm{d}x \\
&= \pi\big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2x + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\big]_0^3 = \tfrac{\pi}{2}\big(\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^{-6} + 12\big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$y(x) = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 1/\sqrt{x}$$

$$M = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\, \mathrm{d}x = 4\pi \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{8\pi}{3}\big(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\big) = \frac{56\pi}{3}$$