Aufgabe 1

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8,$$
$$\int_5^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -8$$

Aufgabe 2

$$\int_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^1 = \tfrac{7}{3}$$

Aufgabe 3

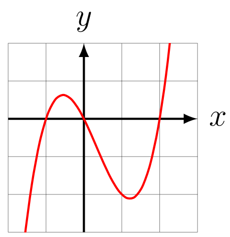
$$\int \frac{x^2+x^4}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{-2}+1\right)\mathrm{d}x = -x^{-1}+x+C$$

Aufgabe 4

$f\colon y = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$

(a) Nullstellen: $x_1 = -1$, $x2 = 0$, $x_3 = 2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$



(b) Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ (einmal notieren genügt)

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{5}{12}$$

$$A_2 = -\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{8}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \tfrac{37}{12}$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \left(3x^2 + p^2\right) \mathrm{d}x &= 21 \\
\left[\tfrac{1}{9}x^3 + p^2 x\right]_{-1}^{2} &= 21 \\
(8 + 2p^2) - (-1 - p^2) &= 21 \\
3p^2 + 9 &= 21 \\
3p^2 &= 12 \\
p &= \pm 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{a} \left(3x^2 - 6x + 4\right) \mathrm{d}x &= 32 \\
\left[x^3 - 3x^2 + 4x\right]_{0}^{a} &= 32 \\
a^3 - 3a^2 + 4a - 32 &= 0 \\
a &= 4
\end{aligned}$$

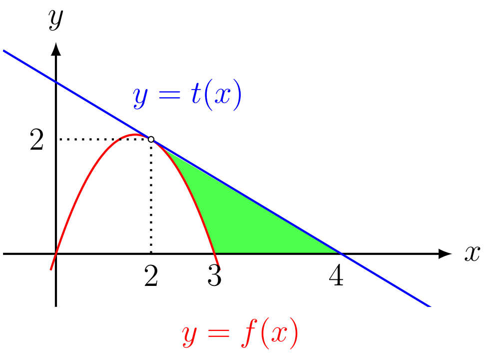
Aufgabe 7

$f(x) = 3x - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 - 2$

Die Tangente entspricht dem Taylorpolynom 1. Ordnung:

$t(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2 + (-1)(x - 2) = 4 - x$

Nullstelle von t: $x = 4$; linke Nullstelle von f: $x = 3$



$$A = A_{\text{Dreieck}} - A_{\text{Parabelstück}} = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \int_{2}^{3} (3x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 - \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{2}^{3} = 2 - \tfrac{7}{6} = \tfrac{5}{6}$$