

Vektorgeometrie (Produkte)

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 + 28 - 48 = -23$$

Aufgabe 2

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 2

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = 6 + 0 - 18 = -12$$

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = 21 - 49 + 28 = 0 \quad (\text{orthogonal})$$

Aufgabe 4

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 4

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 + 0 + 24 = 12$$

Aufgabe 5

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 5

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 6 + 0 = 0 \quad (\text{orthogonal})$$

Aufgabe 6

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 6

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 8+1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 7

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 18 \\ -18 + 18 \\ -54 + 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{kollinear})$$

Aufgabe 8

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 8

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 0 \\ 0 + 6 \\ 12 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 9

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 + 36 \\ -18 + 6 \\ 4 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 10

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 6 \\ -6 + 6 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{kollinear})$$

Aufgabe 11

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 28$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

$$\cos(\varphi) = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 21.04^\circ$$

Aufgabe 12

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 17$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{0 + 9 + 16} = 5$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$$

$$\cos(\varphi) = \frac{17}{5 \cdot 7} = \frac{17}{35} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60.94^\circ$$

Aufgabe 13

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -24$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$$

$$\cos(\varphi) = \frac{-24}{9 \cdot 6} = \frac{-4}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 116.39^\circ$$

Aufgabe 14

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -16$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{81 + 4 + 36} = 11$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$$

$$\cos(\varphi) = \frac{-16}{11 \cdot 6} = \frac{-8}{33} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 104.03^\circ$$

Aufgabe 15

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 15

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \|\vec{c}\| = \sqrt{81 + 324 + 36} = 21$$

Aufgabe 16

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 16

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \|\vec{c}\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$$

Aufgabe 17

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 17

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \|\vec{c}\| = \sqrt{81 + 4 + 36} = 11$$

Aufgabe 18

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 18

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \|\vec{c}\| = \sqrt{16 + 144 + 36} = 14$$