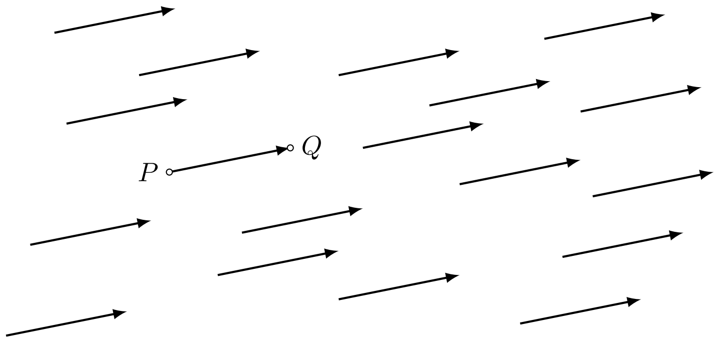
Vektorgeometrie **Schnellkurs**

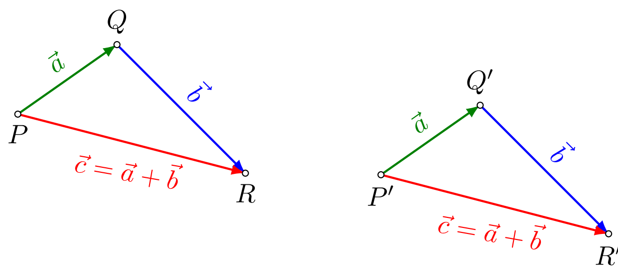
Der Vektorbegriff

Ein *Vektor* $\vec{v}$ ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung. Ein einzelner Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ ist ein *Repräsentant* des Vektors $\vec{v}$.



Vektoraddition

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, dann erhält man einen Repräsentanten der Summe $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, indem man den Anfangspunkt P eines beliebigen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$ mit dem Endpunkt R des Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$ verbindet, der im Endpunkt Q von $\overrightarrow{PQ}$ beginnt.



Diese Definition ist offensichtlich unabhängig vom gewählten Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$.

Der Nullvektor

Der Vektor $\vec{x}$ mit der Eigenschaft, dass $\vec{a} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$ gilt, ist der *Nullvektor* und wird mit $\vec{0}$ bezeichnet. Durch diese Eigenschaft ist der Nullvektor eindeutig bestimmt und wird das *neutrale Element der Vektoraddition* genannt.

Der Gegenvektor eines Vektors

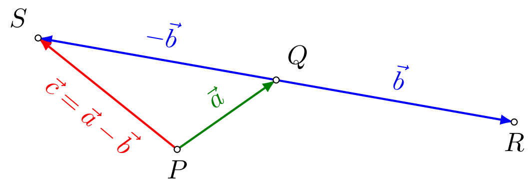
Ist $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und $\vec{x}$ ein Vektor mit der Eigenschaft $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$, so wird $\vec{x}$ der *Gegenvektor* von $\vec{a}$ genannt und mit $-\vec{a}$ bezeichnet. Durch diese Eigenschaft ist der Gegenvektor eindeutig bestimmt und wird *inverses Element der Vektoraddition* genannt.

Vektorsubtraktion

Mit Hilfe des Gegenvektors können wir nun die Vektorsubtraktion definieren.

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \stackrel{\text{Def.}}{=} \vec{a} + (-\vec{b})$

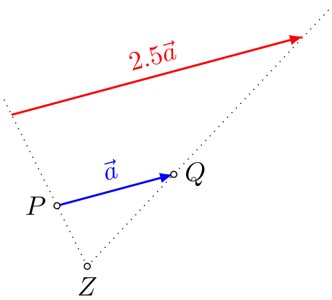
Merke: Man subtrahiert einen Vektor, indem man seinen Gegenvektor addiert.



Auch hier ist die Definition unabhängig vom gewählten Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$.

Multiplikation von Vektoren mit Skalaren (Zahlen)

Ist $\vec{a}$ ein Vektor und α eine reelle Zahl, so ist $\alpha\vec{a}$ der Vektor, welcher durch zentrische Streckung eines Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$ an einem beliebigen Zentrum mit dem Faktor α entsteht. Auch hier ist die Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten (und des Streckungszentrums).



Linearkombination von Vektoren

Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ Vektoren und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen, so wird

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{a}_k$$

Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ genannt.

Kollineare Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* oder *linear abhängig*, wenn es reelle Zahlen α und β gibt, die nicht beide null sind und die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$ erfüllen. Andernfalls werden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *nicht kollinear* bzw. *linear unabhängig* genannt.

Orthonormalbasen

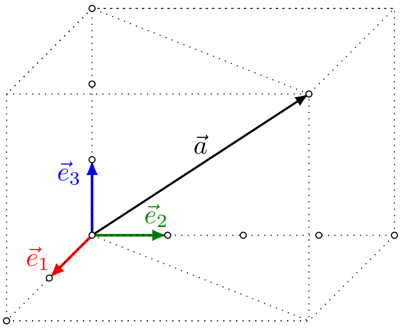
Sind $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ Vektoren,

- die alle paarweise senkrecht zueinander stehen ($\vec{e}_2 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$) und
- die alle die Länge 1 haben ($\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$),

so sprechen wir von einer *Orthonormalbasis* (ONB).

Die Komponentendarstellung von Vektoren

Ist $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ eine ONB, so lässt sich jeder Vektor $\vec{a}$ eindeutig als Linearkombination von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ darstellen:



$\vec{a} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *Komponentendarstellung* von $\vec{a}$

Die Zahlen 2, 4 und 3 werden die *skalaren Komponenten* von $\vec{a}$ genannt.

Die Komponentendarstellung in Aktion

- $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\alpha\vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$ und speziell $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Die Norm eines Vektors in Komponentendarstellung

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ die Komponentendarstellung eines Vektors bezüglich einer ONB, so ist die *Norm* (der *Betrag* oder die *Länge*) von $\vec{a}$ wie folgt definiert:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiele:

- $\|\vec{0}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$
- $\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$
- $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

Die Definition des Skalarprodukts

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Komponentendarstellungen bezüglich einer ONB, so ist das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgt definiert:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 5 - 12 = -7$

Rechenregeln

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Kommutativgesetz)
- $\vec{u} \cdot \big(\vec{v} + \vec{w}\big) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Distributivgesetz)
- $c\big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big) = \big(c\vec{u}\big) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \big(c\vec{v}\big)$ (Verträglichkeit)

Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und Norm

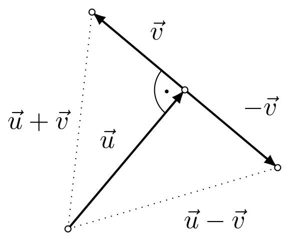
Berechnen wir das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber, so erhalten wir:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right)^2 = (\|\vec{a}\|)^2$$

$\Rightarrow \boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}$

Orthogonale Vektoren

Das Skalarprodukt verrät uns, ob zwei Vektoren *orthogonal* (*senkrecht*) sind. Denn sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht, dann müssen die Längen der Vektoren $\vec{u}+\vec{v}$ und $\vec{u}-\vec{v}$ gleich gross sein (siehe Bild).



$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\| &= \|\vec{u}-\vec{v}\| \\
\sqrt{\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2} &= \sqrt{\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2} \\
\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 \\
\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} &= \vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} \\
2\vec{u}\cdot\vec{v} &= -2\vec{u}\cdot\vec{v} \\
4\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal, wenn $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ gilt.

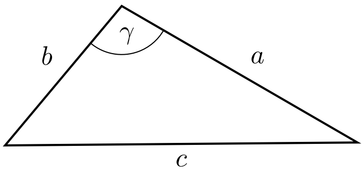
Beispiel

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal, denn $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - 14 + 10 = 0$

Die Zwischenwinkelformel

Bisher können wir das Skalarprodukt dazu verwenden, um den Betrag eines Vektors auf andere Weise zu berechnen oder um zu untersuchen, ob zwei Vektoren orthogonal sind.

Nun leiten wir eine Formel her, mit der wir den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen können. Dazu benötigen wir den Cosinussatz, mit dem sich im allgemeinen Dreieck ein Winkel aus den Längen der drei Seiten bestimmen lässt.



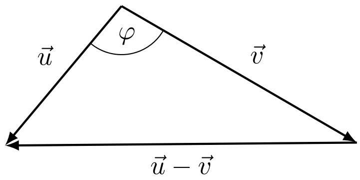
Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

Wir erhalten noch zwei weitere Versionen des Satzes, wenn wir alle Variablen *zyklisch vertauschen*:

$a \to b \to c \to a$ und entsprechend $\gamma \to \alpha \to \beta \to \gamma$

Für $\gamma = 90°$ erhalten wir übrigens …

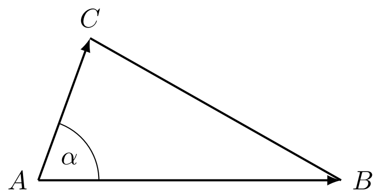
Die Herleitung der Zwischenwinkelformel



$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\varphi) \quad \text{(Cosinussatz)}\\
\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}\right)^2 + \left(\vec{v}\right)^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\varphi)\\
\left(\vec{u}\right)^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left(\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}\right)^2 + \left(\vec{v}\right)^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\varphi)\\
-2\vec{u}\cdot\vec{v} &= -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\varphi)\\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\varphi)\\
\cos(\varphi) &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Berechne den Winkel α im Dreieck mit den Ecken $A(1,3,2)$, $B(3,9,6)$ und $C(4,5,1)$.



Achtung: Die Koordinaten der Punkte A, B und C beziehen sich auf einen festen Ursprung $O(0,0,0)$. Um die tatsächlichen Seitenvektoren des Dreiecks zu bestimmen, müssen wir die Differenzen der Ortsvektoren mit der Formel „Endpunkt minus Anfangspunkt“ bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}3\\9\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 + 12 - 4 = 14$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+36+16} = \sqrt{56} = \sqrt{4\cdot 14} = 2\sqrt{14}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{14}{2\cdot 14} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

Die Definition des Kreuzprodukts

Ist $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine ONB, so definieren wir:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Symbol $\times$ unterscheiden wir das Vektorprodukt vom Skalarprodukt $(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Statt vom Kreuzprodukt spricht man auch vom *Vektorprodukt*.

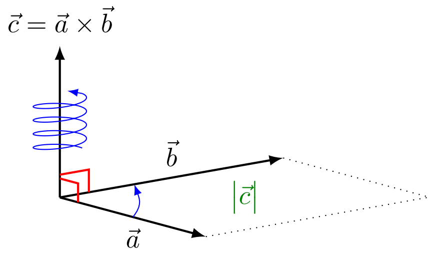
Die Eigenschaften des Kreuzprodukts

Es sei $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

(1) Der Vektor $\vec{c}$ steht sowohl senkrecht auf dem Vektor $\vec{a}$ als auch senkrecht auf dem Vektor $\vec{b}$.

(2) Die *Längenmasszahl* $|\vec{c}|$ ist gleich der Flächenmasszahl des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

(3) Dreht man $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg in Richtung von $\vec{b}$, so entsteht ein Drehsinn. Dreht man damit eine Schraube mit Rechtsgewinde, so bewegt sie sich in Richtung von $\vec{c}$.



Beispiel 1

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ Berechne $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ und zeige $\vec{c} \perp \vec{a}$ sowie $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 + 12 + (-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{a} \text{ (ok)}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -12 + 30 + (-18) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{b} \text{ (ok)}$$

Beispiel 2

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad F = \|\vec{F}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 15^2} = 15$$

Das Resultat ist plausibel, wenn man die Lage von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ veranschaulicht.