Mathematik-Examen 2021

Übungsaufgaben 5e (L+)

Version vom 6. Juli 2021

Aufgabe 1.1

Gesucht: Folge (x_n), die von links gegen $x = 4$ konvergiert.

$x_1 = 3.9$, $x_2 = 3.99$, $x_3 = 3.999$, $\ldots$

$x_n = 4 - 10^{-n}$

Aufgabe 1.2

Gesucht: Folge (x_n), die von rechts gegen $x = -2$ konvergiert.

$x_1 = -1.9$, $x_2 = -1.99$, $x_3 = -1.999$, $\ldots$

$x_n = -2 + 10^{-n}$

Aufgabe 1.3

$\lim\limits_{x\to 4}(3x - 1) = 12 - 1 = 11$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{2}{x-5} = \infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{2}{x-5} = -\infty$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{3-x} = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{3-x} = \infty$

Aufgabe 1.6

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 4x}{3x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{2x(x-2)}{3(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{3} = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 1.7

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+5)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-4}{x+5} = \frac{3-4}{3+5} = -\frac{1}{8}$$

Aufgabe 1.8

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^7}{2^x} = 0$$

(Exponentialfunktionen wachsen asymptotisch „schneller“ als Potenzfunktionen.)

Aufgabe 1.9 (neu)

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergierende Folge von Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aus dem Definitionsbereich von f, die zugehörige Folge der Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ gegen die Zahl g konvergiert.

In diesem Fall ist der Ausdruck $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ definiert.

- Der Grenzwert x_0 der Folge muss nicht im Definitionsbereich von f liegen (nur die Folgeglieder).
- Verlangt man, dass alle Folgeglieder $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *kleiner* als x_0 sind, spricht man von einem linksseitigen Grenzwert und schreibt $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$.
- Verlangt man, dass alle Folgeglieder $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *grösser* als x_0 sind, spricht man von einem rechtsseitigen Grenzwert und schreibt $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$.
- Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig, dann gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; der Grenzwert x_0 der Folge darf also einfach in die Funktion „eingesetzt“ werden.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x - 1) = 1 + 1 - 1 = 2 \quad [f(x) = x^2 + x - 1$ ist stetig$]$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \dfrac{1+2-3}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ $\rightarrow$ Signal zum Faktorisieren und Kürzen

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$

(c) *Vorgehen:* Wähle eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die von links gegen $x_0 = 1$ konvergiert und untersuche ob und gegen welchen Wert die Folge der Funktionswerte $y_1 = f(x_1)$, $y_1 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3), \ldots$ konvergiert.

x	$y = f(x)$
$x_1 = 0.9$	$y_1 = \dfrac{1}{1-0.9} = 10$
$x_2 = 0.99$	$y_2 = \dfrac{1}{1-0.99} = 100$
$\downarrow$	$\downarrow$
1^-	∞

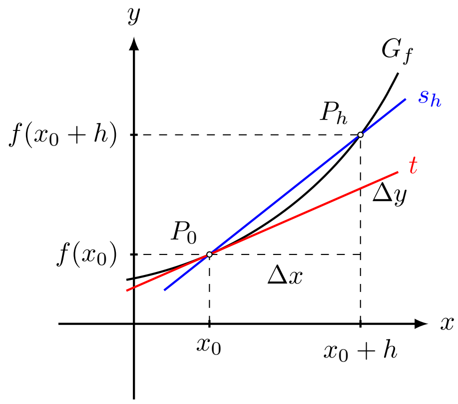
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = \infty$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^9}{2^x} = 0$ [Exponentialfunktionen wachsen/fallen schneller als Potenzfunktionen]

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ exisitiert nicht [lässt sich am Graphen von $y = \sin(x)$ erkennen]

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ [lässt sich am Graphen von $y = \ln(x)$ erkennen]

Aufgabe 2.1



$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: Steigung der Sekante s_h durch P_0 und P_h

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Steigung der Tangente an G_f an der Stelle x_0.

Aufgabe 2.2

$f\colon y = 5;\ x_0 = -1$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3

$f\colon y = 3x - 1;\ x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h) - 1 - 5}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4

$f\colon y = x^2;\ x_0 = 3$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5

$f\colon y = x^3;\ x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12h+6h^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(12+6h+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.6

$f\colon y = \sqrt{x};\ x_0 = 2$

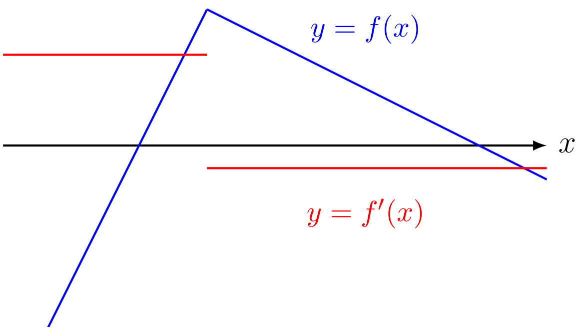
$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\big(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\big)\big(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h\big(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\big)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\big(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\big)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.7

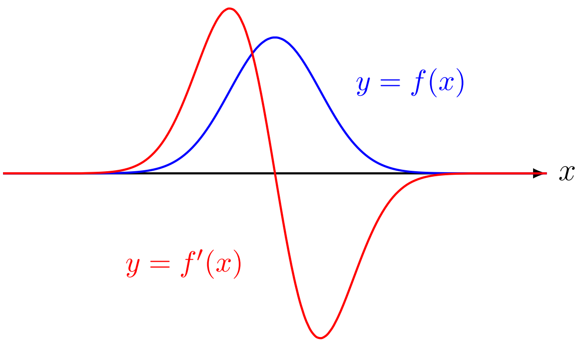
$f\colon y = \dfrac{1}{x};\ x_0 = 5$

$$\begin{aligned}
f'(5) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(5+h)-f(5)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{5+h}-\frac{1}{5}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{5-(5+h)}{5(5+h)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{5(5+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{5(5+h)} = -\frac{1}{25}
\end{aligned}$$

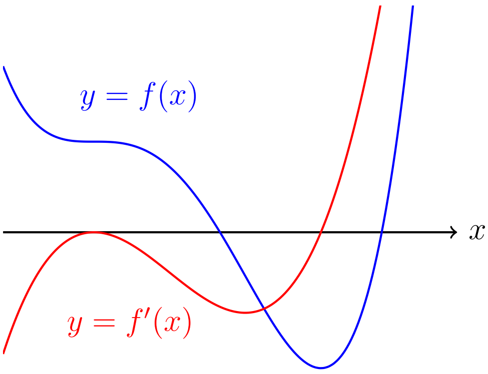
Aufgabe 2.8



Aufgabe 2.9



Aufgabe 2.10



Aufgabe 3.1

$f\colon y = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Aufgabe 3.2

$f\colon y = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

$f\colon y = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

$f\colon y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

$f\colon y = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

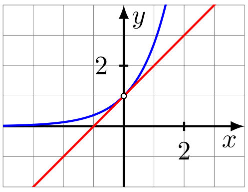
$f\colon y = \mathrm{e}^x$; $x_0 = 0$; Tangente?

$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

$y_0 = m_t x_0 + q \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \cdot 0 + q \quad \Rightarrow \quad q = 1$

$t\colon y = x + 1$



Aufgabe 3.7

$f\colon y = \sqrt{x}$; $x_0 = 4$; Normale?

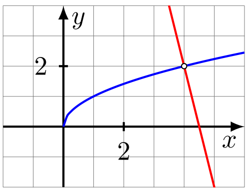
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -4$$

$x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$

$y_0 = m_n x + q \quad \Rightarrow \quad 2 = -4 \cdot 4 + q \quad \Rightarrow \quad q = 18$

$n\colon y = -4x + 18$



Aufgabe 3.8

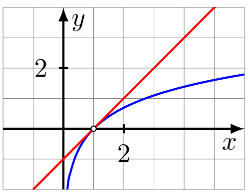
$f\colon y = \ln x$; $x_0 = 1$; Gleichung der Tangente?

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0$

$y_0 = m_t x_0 + q \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = -1$

$t\colon y = x - 1$



Aufgabe 3.9

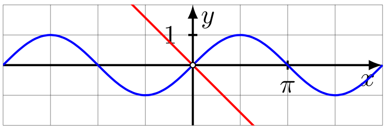
$f\colon y = \sin x$; $x_0 = 0$; Normale?

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(0) = \cos(0) = 1$$
$$m_n = -1/m_t = -1$$

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$y_0 = m_n x_0 + q \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 \cdot 0 + q \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

$n\colon y = -x$



Aufgabe 3.10

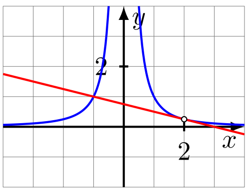
$f\colon y = 1/x^2 = x^{-2}$; $x_0 = 2$; Gleichung der Tangente?

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -2/x^3 \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(2) = -\tfrac{2}{8} = -\tfrac{1}{4}$$

$$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(2) = \tfrac{1}{2^2} = \tfrac{1}{4}$$

$$y_0 = m_t x_0 + q \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{4} \cdot 2 + q \quad \Rightarrow \quad q = \tfrac{3}{4}$$

$t\colon y = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}$



Aufgabe 4.1

$$f(x) = x^4 + \tfrac{1}{6}x^3 - x + 4$$

konstante Faktoren und Summen/Differenzen

$$f'(x) = 4x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 1$$

Aufgabe 4.2

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = x^{-1} - x^{-3}$$

Summe/Differenz

$$f'(x) = -x^{-2} - (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \left(= \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Aufgabe 4.3

$f(x) = \sin(3x)$

Verkettung: $y = \sin(z)$ mit $z = 3x$

$f'(x) = 3\cos(3x)$

Aufgabe 4.4

$f(x) = 4\mathrm{e}^{-x}$

Verkettung und konstante Faktoren ($y = \mathrm{e}^z$ und $z = -x$)

$f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 4.5

$f(x) = (2x - 3)^7$

Verkettung ($y = z^7$ und $z = 2x - 3$), Summe und konstanter Faktor

$f'(x) = 7 \cdot (2x - 3)^6 \cdot 2 = 14(2x - 3)^6$

Aufgabe 4.6

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$

Produkt

$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$

Aufgabe 4.7

$f(x) = (x^2 - 4x + 1) \cdot \mathrm{e}^x$

Produkt

$f'(x) = (2x - 4)\mathrm{e}^x + (x^2 - 4x + 1)\mathrm{e}^x = (2x - 4 + x^2 - 4x + 1)\mathrm{e}^x = (x^2 - 2x - 3)\mathrm{e}^x$

Aufgabe 4.8

$f(x) = \sin x \cdot \cos x$

Produkt

$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Aufgabe 4.9

$f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \dfrac{1}{x} = x + 1 + x^{-1}$

Quotient $\Rightarrow$ Summe

$f'(x) = 1 + 0 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} \left(\text{oder: } \dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$

Aufgabe 4.10

$f(x) = \dfrac{2x-5}{3x+1}$

Quotient

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (3x+1) - (2x-5) \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{6x + 2 - (6x - 15)}{(3x+1)^2} = \frac{17}{(3x+1)^2}$$

Aufgabe 4.11

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Quotient

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2-1) - 1 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Aufgabe 4.12

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Quotient

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder: $\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$

Aufgabe 4.13

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Verkettung ($y = \sqrt{z}$, $z = x^2 + 1$)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Aufgabe 4.14

$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+2}$

Verkettung ($y = \mathrm{e}^z$, $z = x^2 + 3x + 2$)

$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+2} \cdot (2x + 3) = (2x + 3)\mathrm{e}^{x^2+3x+2}$

Aufgabe 4.15 (neu)

(a) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - x + 1$

(b) $f(x) = 3\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\cos(x)$

(c) $f(x) = \sin(3x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3\cos(3x)$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow$
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \\ f''(x) &= \mathrm{e}^{-x} \\ \ldots &= \ldots \\ f^{(5)} &= -\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

(e) $f(x) = x \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

(f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.1

Eine Funktion f ist stetig, wenn sich ihr Graph G_f ohne Absetzen des Stifts zeichnen lässt.

Aufgabe 5.2

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn die Bedingung

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

erfüllt ist. Dies bedeutet, dass für den Nachweis der Stetigkeit folgende Punkte überprüft werden müssen

- Der Funktionswert $f(x_0)$ muss existieren.
- Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ muss existieren.
- Die beiden oben bestimmten Werte müssen übereinstimmen.

Eine Funktion ist stetig, wenn sie an jeder Stelle $x \in D$ stetig ist.

Aufgabe 5.3

(a) $f\colon y = 3x + 8$ (stetig)

(b) $f\colon y = 2x^2 - 3x + 5$ (stetig)

(c) $f\colon y = 1/x^2$ (stetig)

(d) $f\colon y = \sqrt{x}$ (stetig)

(e) $f\colon y = \mathrm{e}^x$ (stetig)

(f) $f\colon y = \ln x$ (stetig)

(g) $f\colon y = \sin x$ (stetig)

(h) $f\colon y = \cos x$ (stetig)

(i) $f\colon y = \tan x$ (stetig)

(j) $f\colon y = |x|$ (stetig)

Aufgabe 5.4

$f(1) = \dfrac{1}{(1-1)^2} = \dfrac{1}{0^2} = \dfrac{1}{0}$ nicht definiert

f ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig und hat dort einen *Pol ohne Vorzeichenwechsel*.

Aufgabe 5.5

$f(2) = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ ist nicht definiert

f ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig.

$\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ für $x \neq 2 \Rightarrow$ *hebbare Definitionslücke* bei $x_0 = 2$

Aufgabe 5.6

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{für } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(a) $f(2) = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 1) = 1$

Da $5 - x^2$ als Differenz von stetigen Funktionen wieder stetig ist, genügt es, den rechtseitigen Grenzwert zu untersuchen.

(a) und (b) stimmen überein $\Rightarrow$ f ist an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

Aufgabe 5.7

$f(3) = \dfrac{3+3}{3-3} = \dfrac{6}{0}$ ist nicht definiert

f hat an der Stelle $x_0 = 3$ einen *Pol mit Vorzeichenwechsel*.

Aufgabe 5.8

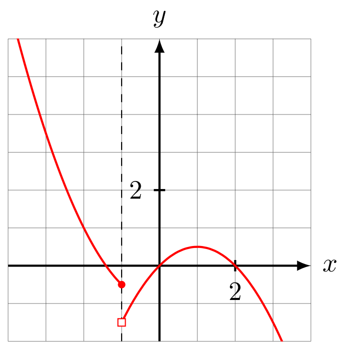
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{für } x \leq -1 \\ x - \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

(a) $f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^2 - 1 = -0.5$

(b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) = -1 - \frac{1}{2} = -1.5$

(a) und (b) stimmen nicht überein.

f ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig und hat dort eine *Sprungstelle*.



Aufgabe 5.9

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - a & \text{für } x < 3 \\ ax + 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Jede der beiden Teilfunktionen ist eine Summe aus stetigen Funktionen und somit selber stetig (für jede Wahl von a).

Also genügt es, die Stetigkeit bei $x_0 = 3$ zu „erzwingen“:

- $f(3) = a \cdot 3 + 1 = 3a + 1$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - x - a) = 9 - 3 - a = 6 - a$

Damit f stetig ist, muss $3a + 1 = 6 - a$ gelten:

$$\begin{aligned} 3a + 1 &= 6 - a \\ 4a &= 5 \\ a &= 1.25 \end{aligned}$$

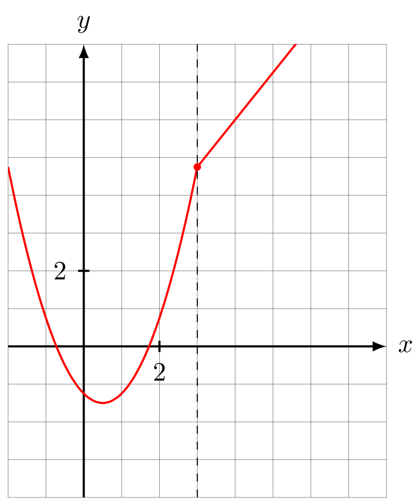
(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1.25 & \text{für } x < 3 \\ 1.25x + 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x < 3 \\ 1.25 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

Jeder der beiden Teilfunktionen ist differenzierbar. Daher müssen wir nur noch die Differenzierbarkeit an der Übergangsstelle $x_0 = 3$ prüfen:

- $f'(3) = 1.25$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - x - 1.25) = 9 - 3 - 1.25 = 4.75$

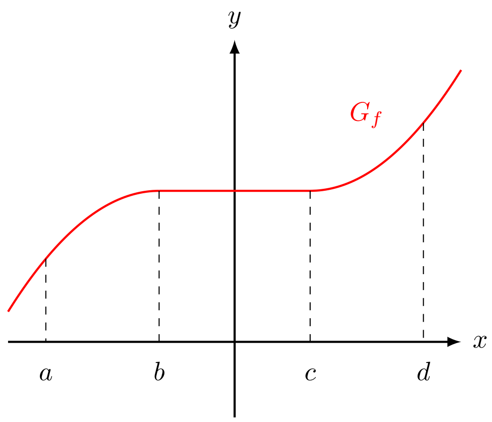
Da beide Werte (Tantentensteigungen) verschieden sind, ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ nicht differenzierbar.



Aufgabe 6.1

Eine Funktion f ist im Intervall I monoton wachsend, wenn für alle x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_1$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Für streng monoton wachsend muss $f(x_1) < f(x_2)$ gelten.

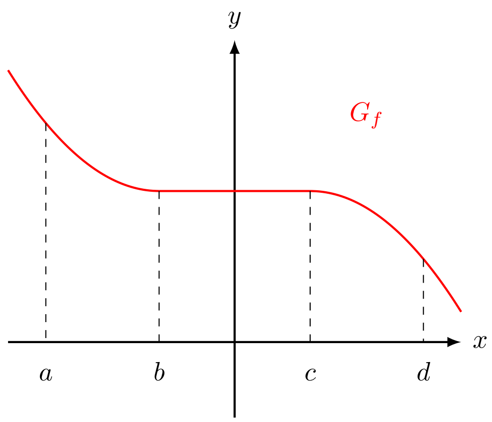


- f ist im Intervall $I_1[a, d]$ monoton wachsend.
- f ist in $I_2 = [a, b]$ und $I_3 = [c, d]$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 6.2

Eine Funktion f ist im Intervall I monoton fallend, wenn für alle x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_1$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Für streng monoton fallend muss $f(x_1) > f(x_2)$ gelten.



- f ist im Intervall $I_1 = [a, d]$ monoton fallend.
- f ist in $I_2 = [a, b]$ und $I_3 = [c, d]$ streng monoton fallend.

Aufgabe 6.3

Eine differenzierbare Funktion f ist an der Stelle x_0 ...

- streng monoton wachsend, wenn gilt: $f'(x_0) > 0$
- streng monoton fallend, wenn gilt: $f'(x_0) < 0$

Aufgabe 6.4

$f\colon y = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

$f'(1) = 3 - 8 + 3 = -2 < 0$

f ist an der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend.

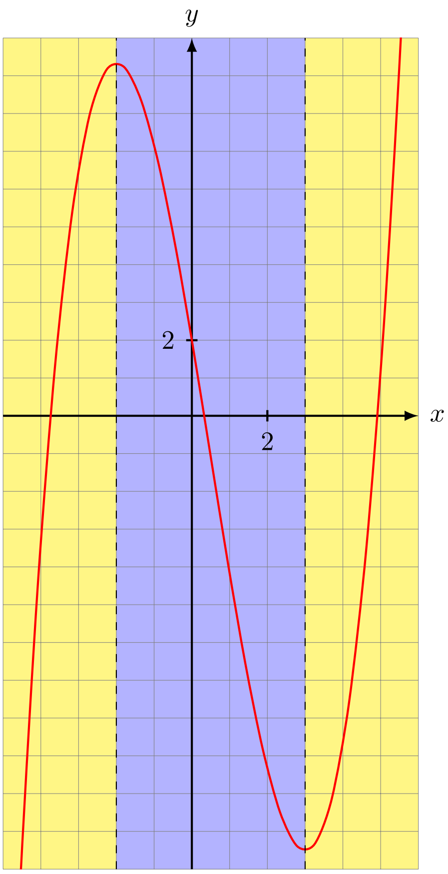
Aufgabe 6.5

$f\colon y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

$x_1 = -2$ und $x = 3$ sind Stellen mit horizontaler Tangente.

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



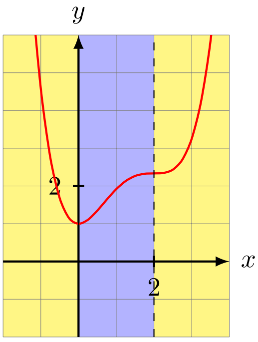
Aufgabe 6.6

$f\colon y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 1$

$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)(x-2)$

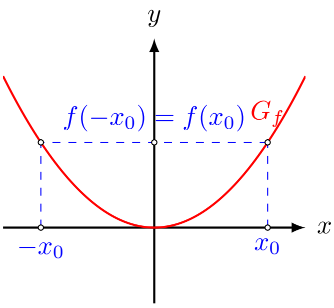
$x_1 = 0$ und $x_2 = x_3 = 2$ sind Stellen mit horizontaler Tangente.

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
x	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$



Aufgabe 7.1

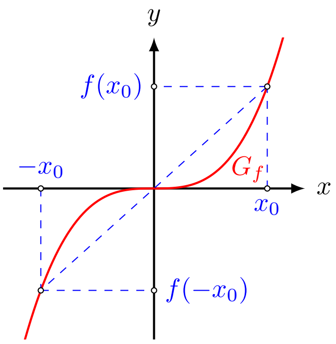
Der Graph G_f einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn *für alle* $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = f(x)$.



Funktionen mit dieser Eigenschaft werden *gerade* genannt.

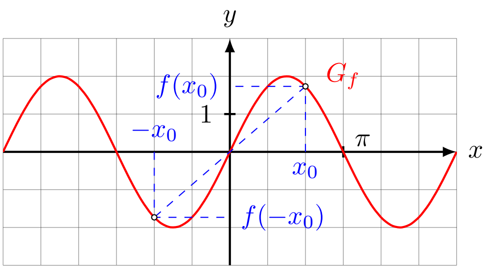
Aufgabe 7.2

Der Graph G_f einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zum Ursprung $(0,0)$, wenn *für alle* $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.



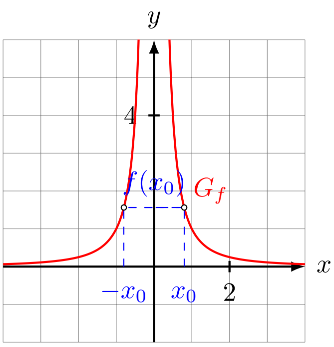
Funktionen mit dieser Eigenschaft werden *ungerade* genannt.

Aufgabe 7.3



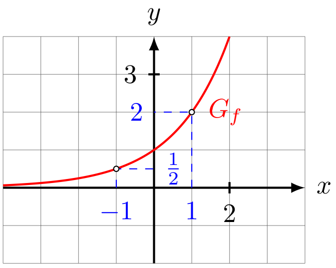
G_f ist symmetrisch zum Ursprung $(0,0)$, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

Aufgabe 7.4



G_f ist symmetrisch zur Ordinate, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$.

Aufgabe 7.5



Die Verneinung von „Alle x haben die Eigenschaft E." lautet: „Es gibt ein x, das die Eigenschaft E nicht hat."

G_f ist nicht ordinatensymmetrisch, (z. B.) für $x = 1$ gilt:

$f(-1) = \frac{1}{2} \neq 2 = f(1)$

G_f ist auch ursprungssymmetrisch, da auch hier für $x = 1$ gilt:

$f(-1) = \frac{1}{2} \neq -2 = -f(1)$

Aufgabe 7.6

Vermutung: Da f eine Summe aus geraden Funktionen ist, ist f ist gerade. Also ist der Graph G_f symmetrisch zur y-Achse.

Beweis: Für ein beliebiges $x \in D_f$ gilt:

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 5 = x^4 - 3x^2 + 5 = f(x)$

Aufgabe 7.7

Vermutung: Da f eine Summe aus ungeraden Funktionen ist, ist f ungerade. Also ist der Graph G_f symmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$.

Beweis: Für ein beliebiges $x \in D_f$ gilt:

$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x = -(x^3 - 6x) = -f(x)$

Aufgabe 7.8

Vermutung: Da f eine Summe aus geraden und ungeraden Funktionen ist, ist f ist weder gerade noch ungerade. Also ist der Graph G_f weder symmetrisch zur y-Achse noch symmetrisch zum Ursprung.

Beweis: Wähle z. B. $x = 1$. Dann gilt:

$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -2$

$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$

Also gilt für $x = 1$:

- $f(-1) = -2 \neq 3 = f(1)$ und
- $f(-1) = -2 \neq -3 = -f(1)$

Aufgabe 7.9

Vermutung: Da f eine Produkt aus einer ungeraden und einer geraden Funktion ist, ist f ungerade. Also ist der Graph G_f symmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$.

Beweis: Für ein beliebiges $x \in D_f$ gilt:
$f(-x) = (-x) \cdot \mathrm{e}^{(-x)^2} = -x\mathrm{e}^{x^2} = -f(x)$

Aufgabe 7.10

Vermutung: Da f ein Quotient aus ungeraden Funktionen ist, ist f gerade. Also ist der Graph G_f symmetrisch zur y-Achse.

Beweis: Für ein beliebiges $x \in D_f$ gilt:
$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 + (-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{-x^3 - x}{-\sin x} = \dfrac{-(x^3 + x)}{-\sin x} = \dfrac{x^3 + x}{\sin x} = f(x)$

Aufgabe 7.11

G_f ist symmetrisch zur y-Achse. Daher gilt ebenfalls $f(-4) = 3$.

Aufgabe 7.12

Da G_f symmetrisch zum Ursprung ist, muss $f(0) = -f(0)$ gelten. Der einzige Wert, der dafür in Frage kommt, ist $f(0) = 0$.

Aufgabe 7.13 (neu)

(a) $f(x) = x^3 - 4x$
$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$
f ist ungerade also G_f symmetrisch zum Ursprung

(b) $f(x) = \mathrm{e}^x$
$f(-x) = \mathrm{e}^{-x} \neq \mathrm{e}^x = f(x)$ und $f(-x) = \mathrm{e}^{-x} \neq -\mathrm{e}^x = -f(x)$
f ist weder gerade noch ungerade; also keine uns bekannte Symmetrie

(c) $f(x) = \sqrt{x^2}$
$f(-x) = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = f(x) \; \forall \; x \in D_f$
f ist gerade; also ist G_f symmetrisch zur y-Achse

(d) $f(x) = \sin(x)$ [Graph oder Taylorreihe kennen!]
$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$
f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung

(e) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 5}{x^3 - x}$

Die Funktion im Zähler ist gerade und die im Nenner ungerade.

$\Rightarrow$ Quotient ungerade

f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = \dfrac{x(x-3)}{x-3} = x$

(Der die Symmetrie störende Term $(x - 3)$ lässt sich kürzen.)

f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung

Aufgabe 8.1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-x^3) = -\infty$

Aufgabe 8.2

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$

Aufgabe 8.3

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^9}{2^x} = 0$

Exponentialfunktionen $y = a^x$ mit $a > 1$ wachsen asymptotisch schneller als Potenzfunktionen $y = x^b$.

Aufgabe 8.4

- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

Aufgabe 8.5

$\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ ist nicht definiert

Aufgabe 8.6

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$

Aufgabe 8.7

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) = 0$

Die Potenzfunktion $y = x$ strebt asymptotisch schneller gegen Null als $y = \ln x$ gegen $-\infty$.

Aufgabe 8.8

$\lim\limits_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos(0) = 1$

Aufgabe 8.9

$f : y = \frac{2x}{x-1}$

senkrechte Asymptote: $x = 1$ (Pol mit Vorzeichenwechsel)

Polynomdivsion

$2x : (x-1) = 2 + \frac{2}{x-1}$

horizontale Asymptote: $y = 2$

Aufgabe 8.10

$f : y = \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$

senkrechte Asymptoten: $x = -1$ und $x = 2$

„Polynomdivsion“

$x : (x^2 - x - 2) = 0 + \frac{x}{x^2 - x - 2}$

horizontale Asymptote: $y = 0$

Aufgabe 8.11

$f : y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 1}$

senkrechte Asymptote: $x = -1$

Polynomdivsion

$(x^2 + 4x + 5) : (x + 1) = x + 3 + \frac{2}{x+1}$

schiefe Asymptote: $y = x + 3$

Aufgabe 8.12 (neu)

(a) Bestimme das asymptotische Verhalten der Funktion f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

- $f(x) = x^2 - x^3$

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^3\right) = \infty$

- $f(x) = \mathrm{e}^x$

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

- $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$

(b) Bestimme die Gleichung der Asymptote der Funktion $f\colon y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$.

Polynomdivision: $(x^2 - 4x - 5) : (x - 1) = x - 3 - \dfrac{8}{x - 1}$

[Lösungsweg für die Polynomdivision: in der Theorie nachschauen]

Gleichung der Asymptote: $g\colon y = x - 3$ da $\dfrac{2}{x - 1} \to 0$ für $|x| \to \infty$

Aufgabe 9.1

$f\colon y = (x - 4)(2x - 1)(x^2 - 5)$

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = (-4) \cdot (-1) \cdot (-5) = -20$

Nullstellen: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{5}$

Aufgabe 9.2

$f\colon y = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = \dfrac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 3)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \dfrac{2 \cdot 3}{3} = 2$

Nullstellen: $x_1 = -2$

Aufgabe 9.3

$f\colon y = \sqrt{x-7}$

$D = [7, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon 7 \leq x < \infty\}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \sqrt{-7}$ ist nicht definiert

Nullstelle: $x = 7$

Aufgabe 9.4

$f\colon y = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{(5-x)(5+x)}$

$D = [-5, 5] = \{x \in \mathbb{R}\colon -5 \leq x \leq 5\}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \sqrt{25 - 0} = 5$

Nullstellen: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

Aufgabe 9.5

$f\colon y = \mathrm{e}^{x^2}$

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

Nullstellen: keine

Aufgabe 9.6

$f\colon y = (x^2 - 7x + 12)\mathrm{e}^x = (x-3)(x-4)\mathrm{e}^x$

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = (0^2 - 7 \cdot 0 + 12)\mathrm{e}^0 = 12 \cdot 1 = 12$

Nullstellen: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

Aufgabe 9.7

$f\colon y = \ln(2x - 1)$

$2x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \ln(-1)$ nicht definiert

Nullstellen: $\ln(2x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Aufgabe 9.8

$f\colon y = \ln\left(x^2 - 6x + 9\right) = \ln(x-3)^2$

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

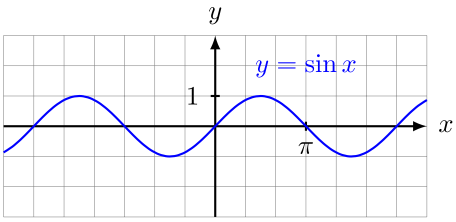
Ordinatenabschnitt: $f(0) = \ln(9)$

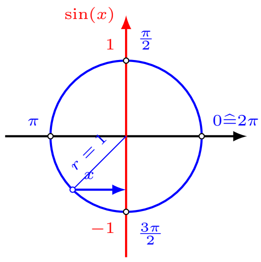
Nullstellen: $\ln\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 1 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.9

$f\colon y = \sin(2x + \pi)$





$D = \mathbb{R}$

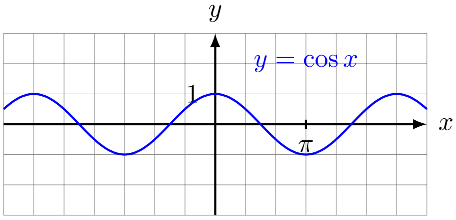
Ordinatenabschnitt: $f(0) = \sin(\pi) = 0$

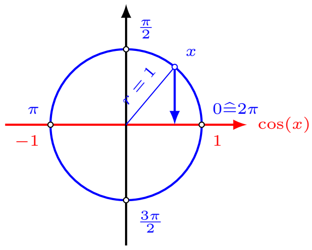
Nullstellen: $\sin(2x + \pi) = 0 = \sin(k \cdot \pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2x + \pi &= k \cdot \pi \\ 2x &= k \cdot \pi - \pi \\ x_k &= \frac{\pi(k-1)}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aufgabe 9.10

$f\colon y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$





$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$

Nullstellen: $\cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \pi &= \tfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad || \cdot 2 \\ x - 2\pi &= \pi + 2k\pi \\ x_k &= 3\pi + 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aufgabe 9.11

$f\colon y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

		-4	2	4	-3
3	1	-1	-1	1	0
1	1	0	-1	0	
1	1	1	0		
-1	1	0			

Nullstellen: $x_1 = 3,\ x_2 = x_3 = 1,\ x_4 = -1$

Aufgabe 9.12

$f\colon y = 2x^4 - 21x^3 + 72x^2 - 91x + 30$

		-21	72	-91	30
5	2	-11	17	-6	0
3	2	-5	2	0	
2	2	-1	0		
$\frac{1}{2}$	2	0			

Nullstellen: $x_1 = 5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2,\ x_4 = \frac{1}{2}$

Aufgabe 9.13

$f\colon y = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

		-5	5	3
3	1	-2	-1	0

$\Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x-3)(x^2 - 2x - 1)$

Lösungen von $x^2 - 2x - 1 = 0$:

$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_3 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \cdots = 1 - \sqrt{2}$$

Aufgabe 9.14 (neu)

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion f

(a) $f(x) = ax + b \qquad (a,\, b \in \mathbb{R})$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = b$
Nullstelle(n): $ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$

(b) $f(x) = x^2 - x + 2$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 2$
Nullstelle(n): $0 = x^2 - x + 2 = (x+1)(x-2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\, x_2 = 2$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Ordindatenabschnitt $f(0) = \sqrt{-9}$ nicht definiert
Nullstelle(n): $0 = \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(x-3)(x+3)} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 3$

(d) $f(x) = \ln(7 - 3x)$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \ln(7)$
Nullstelle(n): $\ln(7 - 3x) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{\ln(7-3x)} = \mathrm{e}^0 \;\Rightarrow\; 7 - 3x = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-3} \qquad$ (nur für $x \neq 3$ definiert)

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \dfrac{12}{-3} = -4$

Nullstelle(n): $x = 4$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^x$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$
Nullstelle(n): keine [skizziere den Graph von $y = \mathrm{e}^x$]

(g) $f(x) = \sin(x)$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \sin(0) = 0$
Nullstelle(n): $\{x + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ [skizziere den Graphen von $y = \sin(x)$]

(h) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ (alle Nullstellen sind ganzzahlig)
Ordinatenabschnitt: $f(0) = -3$
Nullstellen (Horner-Schema):

$$\begin{array}{c|c|ccc}
x & a_3 & -5 & 7 & -3 \\
\hline
3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 3,\ x_2 = x_3 = 1$

Aufgabe 10.1

$f(x) = \mathrm{e}^x;\ x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1 \\
f'(x) &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1
\end{aligned}$$

$$T_2(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Aufgabe 10.2

$f(x) = \sqrt{x};\ x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \\
f'(x) &= \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \tfrac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \\
f''(x) &= -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -\tfrac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}(x^2 - 2x + 1) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8} \\
&= -\tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{8}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.3

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1/x = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1 \\
f'(x) &= -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -1^{-2} = -1 \\
f''(x) &= 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= 1 - 1(x-1) + 1(x-1)^2 \\
&= 1 - x + 1 + (x^2 - 2x + 1) \\
&= x^2 - 3x + 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.4

$f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f(0) = \sin(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \cos(0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -\sin(0) = 0 \end{aligned}$$

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (x - 0)^2 = x$$

Aufgabe 10.5

$f(x) = \ln(x)$; $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0 \\ f'(x) &= 1/x = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1^{-1} = 1 \\ f''(x) &= -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -1^{-2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 0 + 1 \cdot (x-1) - \tfrac{1}{2} \cdot (x-1)^2 \\ &= x - 1 - \tfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) \\ &= x - 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 10.6

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$; $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 4x + 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 4 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3 \\ f''(x) &= 6x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 4 + 3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 \\ &= 4 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.1

$f(x) = x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 12x &= 0 \\ 3x(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Test: $f''(0) = 0 - 12 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}\big(0, 0\big)$

$f''(4) = 24 - 12 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}\big(4, -32\big)$

Aufgabe 11.2

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 6$

$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^3 - 4x^2 + 4x &= 0 \\ x(x^2 - 4x + 4) &= 0 \\ x(x-2)^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 = x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Test: $f''(0) = 0 - 0 + 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}\big(0, 6\big)$

$f''(2) = 12 - 16 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}\big(2, -\frac{14}{3}\big)$

Aufgabe 11.3

$f(x) = x^3 + ax^2 + 7x - 3$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 7$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 7 &= 0 \\ 10 + 2a &= 0 \\ a &= -5 \end{aligned}$$

$f''(x) = 6x + 2 \cdot (-5) = 6x - 30$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 30 = -24 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1, 0)$

Aufgabe 11.4

Eine Polynomfunktion vom Grad 8 hat nach dem Ableiten noch den Grad 7. Eine Polynomgleichung vom Grad 7 hat gemäss dem Fundamentalsatz der Algebra maximal 7 reelle Lösungen. Also kann die Funktion maximal 7 Extrempunkte haben.

Aufgabe 12.1

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ f'(x) &= 2x - 4 \\ f''(x) &= 2 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Kandidaten: $f''(x) = 0$

$$2 = 0$$

Die Funktion hat keine Wendepunkte, was auch nicht verwunderlich ist, da ihr Graph eine Parabel ist.

Aufgabe 12.2

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 24x - 14 \\ f''(x) &= 12x^2 - 36x + 24 \\ f'''(x) &= 24x - 36 \end{aligned}$$

Kandidaten:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 - 36x + 24 &= 0 \\ 12(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\ 12(x-1)(x-2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Test: $f''(1) = 24 \cdot 1 - 36 = -12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_1(1, -4)$

$f''(2) = 24 \cdot 2 - 36 = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_2(2, -9)$

Aufgabe 12.3

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + 1 \\
f'(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 2ax + 7 \\
f''(x) &= 12x^2 - 18x + 2a \\
f'''(x) &= 24x - 18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(1) &= 0 \\
12 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 2a &= 0 \\
-6 + 2a &= 0 \\
a &= 3
\end{aligned}$$

$$f'''(3) = 24 \cdot 3 - 18 = 54 \neq 0$$

Für $a = 3$ erhalten wir einen Wendepunkt an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 12.4

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1 \\
f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8 \\
f''(x) &= 12x^2 - 36x + 24
\end{aligned}$$

Kandidaten:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
12(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\
12(x-1)(x-2) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}$$

Ein Terrassenpunkt ist eine Wendepunkt mit horizontaler Tangente. Prüfe, ob die Steigung an den Wendestellen den Wert 0 hat:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 4 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 24 \cdot 1 - 8 = 4 - 18 + 24 - 8 = 2 \\
f'(2) &= 4 \cdot 8 - 18 \cdot 4 + 24 \cdot 2 - 8 = 32 - 72 + 48 - 8 = 0
\end{aligned}$$

Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Terrassenpunkt.

Aufgabe 12.5

Eine Polynomfunktion vom Grad 7 hat nach zweimaligem Ableiten noch den Grad 5. Eine Polynomgleichung vom Grad 5 hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra maximal 5 reelle Lösungen. Also kann die Funktion maximal 5 Wendepunkte haben

Aufgabe 13.1

In einer orthonormierten Basis stehen alle Basisvektoren paarweise senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

Aus der Definition $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ folgt dann:

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$

$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$

$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$

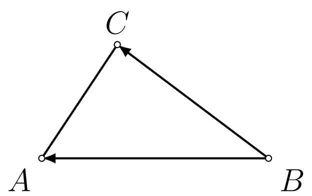
und so:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \big(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2\big) \cdot \big(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2\big) \\
&= a_1b_1 \underbrace{\big(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1\big)}_{1} + a_1b_2 \underbrace{\big(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2\big)}_{0} + a_2b_1 \underbrace{\big(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1\big)}_{0} + a_2b_2 \underbrace{\big(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2\big)}_{1} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.2

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arccos \frac{-6+10+15}{\sqrt{4+25+9} \cdot \sqrt{9+4+25}} \\
&= \arccos \frac{19}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{38}} = \arccos \frac{19}{38} = \arccos \frac{1}{2} = 60°
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.3



$A(9, 4, 6)$, $B(8, 2, 5)$ und $C(12, 5, 10)$.

$$\overrightarrow{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arccos \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \\
&= \arccos \frac{4+6+5}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{16+9+25}} = \arccos \frac{15}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{50}} = 30°
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.4

$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ 3 + t^2 + 4t &= 0 \\ t^2 + 4t + 3 &= 0 \\ (t+1)(t+3) &= 0 \\ t_1 &= -1 \\ t_2 &= -3 \end{aligned}$$

Aufgabe 13.5

$d_1 =$ `"to be or not to be"`

$d_2 =$ `"to be is to do"`

Wort	d_1	d_2
to	2	2
be	2	1
or	1	0
not	1	0
is	0	1
do	0	1

$$\sphericalangle(d_1, d_2) = \arccos \frac{4+2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{7}} = \arccos \frac{6}{\sqrt{70}} = 44.18°$$

Aufgabe 13.6

$d_1 =$ `"so was ist das da"`

$d_2 =$ `"das ist so nicht"`

$d_3 =$ `"da ist was nicht so"`

Wort	d_1	d_2	d_3
so	1	1	1
was	1	0	1
ist	1	1	1
das	1	1	0
da	1	0	1
nicht	0	1	1

$$\sphericalangle(d_1, d_2) = \arccos \frac{3}{\sqrt{5 \cdot 4}} = \arccos 0.67$$

$$\sphericalangle(d_1, d_3) = \arccos \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \arccos 0.8$$

$$\sphericalangle(d_2, d_3) = \arccos \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 5}} = \arccos 0.67$$

Da die Cosinusfunktion im Intervall $[0, 90°]$ monoton fällt, ist der Winkel umso kleiner, je grösser das Argument von arccos ist.

Somit haben die Dokumente d_1 und d_3 die kleinste Dokumentdistanz.

Aufgabe 13.7

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (2+4+6) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (10+4+0) = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14.1

(a) $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(b) Die Länge von $\vec{c}$ entspricht der Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(c) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*; d.h. dreht man den Vektor $\vec{a}$ auf kürzestem Wege in die Richtung von Vektor $\vec{b}$, so zeigt der Vektor $\vec{c}$ in die Richtung einer Rechtsschraube.

Aufgabe 14.2

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14.3

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-8 \\ 10-9 \\ 12-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$F = |\vec{n}| = \sqrt{16+1+64} = \sqrt{81} = 9\,\text{FE}$ (FE: Flächeneinheiten)

Aufgabe 14.4

Vorsicht: Die Ortsvektoren zu den Ecken entsprechen nicht den Kantenvektoren. Diese müssen zuerst durch Differenzenbildung bestimmt werden, wobei es für die Berechnung des Flächeninhalts keine Rolle spielt, von welcher Ecke man ausgeht.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$F = \tfrac{1}{2}|\vec{n}| \overset{*}{=} |\tfrac{1}{2}\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

* da alle Komponenten gerade sind, ist es sinnvoller, den Normalenvektor vor der Längenberechnung zu halbieren, da die Komponenten auf diese Weise kleiner und damit die Länge leichter zu berechnen ist.

Aufgabe 14.5

(a) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ ist definiert und ergibt eine Zahl

(b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c}$ ist nicht definiert, da der erste Faktor eine Zahl ist.

(c) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$ ist definiert und ergibt einen Vektor

Aufgabe 15.1

Werte der Strichprobe: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 3$, $x_5 = 7$:

Ordnungsstatistik: 2, 3, 3, 5, 7

empirischer Mittelwert: $\overline{x} = 4$

empirische Varianz: $s^2 = 4$; empirische Standardabweichung: $s = 2$

Minimum: $x_{\min} = 2$

1. Quartil: $q_1 = 2.5$

Median: $\tilde{x} = q_2 = 3$

3. Quartil: $q_3 = 6$

Maximum: $x_{\max} = 7$

Interquartilabstand: IQR $= 3.5$

Spannweite: $R = 5$

Modus: 3

Aufgabe 15.2

Ordnungsstatistik: 1, 1, 3, 5, 6, 8 (Stichprobe)

empirischer Mittelwert: $\overline{x} = 4$

empirische Varianz: $s^2 = 8$; empirische Standardabweichung: $s = \sqrt{8}$

$x_{\text{min}} = 1$, $q_1 = 1$, $\tilde{x} = 4$, $q_3 = 6$, $x_{\text{max}} = 8$

$\text{R} = x_{\text{max}} - x_{\text{min}} = 7$

$\text{IQR} = q_3 - q_1 = 5$

$\text{Modus} = 1$

Aufgabe 15.3

Das arithmetische Mittel wird stark durch Werte beeinflusst, die sehr viel grösser oder kleiner sind als das arithmetische Mittel der übrigen Werte (*Ausreisser*).

Der Median ist hingegen robust gegenüber Ausreissern.

Beispiel: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 90$

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+90}{5} = \frac{100}{50} = 20$$

$\tilde{x} = 3$ [mittlerer Wert in der Ordnungsstatistik]

Aufgabe 15.4

$x_1 = 2$, $x_2 = c$

$$\overline{x} = \frac{2+c}{2}$$

$$\begin{aligned}
\left(2 - \frac{2+c}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{2+c}{2}\right)^2 &= 8 \\
\left(\frac{2-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-2}{2}\right)^2 &= 8 \\
2\left(\frac{c-2}{2}\right)^2 &= 8 \\
\left(\frac{c-2}{2}\right)^2 &= 4 \\
\frac{c-2}{2} &= \pm 2 \\
c_1 &= 6 \\
c_2 &= -2
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.5

Zur Erinnerung:

- *nominalskalierte* Merkmalswerten können in Bezug auf Gleichheit oder Ungleichheit verglichen werden. *Beispiele:* Geschlecht, Konfession, ...
- *ordinalskalierte* Merkmalswerte können in Bezug auf ihre Grösse verglichen werden.

  Beispiele: Zufriedenheit, Schulnoten, ...
- *intervallskalierte* Merkmalswerte können in Bezug auf ihre Unterschide verglichen werden.

  Beispiele: Temperatur in Grad Celsius, Uhrzeiten, ...
- *verhältnisskalierte* Merkmalswerte können in Bezug auf ihr Verhältnis verglichen werden.

  Beispiele: Einkommen, Alter, ...

Damit folgt:

(a) Für die Berechnung des arithmetischen Mittels benötigt man mindestens intervallskalierte Merkmalswerte.

(b) Für die Berechnung des Modus genügen mindestens nominalskalierte Merkmalswerte.

(c) Für die Berechnung des Medians benötigt man mindestens ordinalskalierte Mermkalswerte.

Aufgabe 16.1

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Alex	~~Betsy~~	~~Ann~~	~~Cora~~
Ben	~~Betsy~~	~~Ann~~	Cora
Carl	~~Betsy~~	Ann	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Ann	Carl	Ben	Alex
Betsy	Carl	Ben	Alex
Cora	Ben	Carl	Alex

Queue: ~~Alex Ben Carl Alex Ben Alex~~

~~Alex + Betsy~~
~~Ben + Betsy~~
Carl + Betsy
~~Alex + Ann~~
Ben + Ann
Alex + Cora

Aufgabe 16.2

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Ann	~~Carl~~	~~Ben~~	Alex
Betsy	~~Carl~~	Ben	Alex
Cora	~~Ben~~	~~Carl~~	~~Alex~~

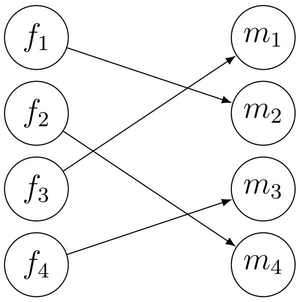
	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Alex	Betsy	Ann	Cora
Ben	Betsy	Ann	Cora
Carl	Betsy	Ann	Cora

Queue: ~~Ann~~ ~~Betsy~~ ~~Cora~~ ~~Ann~~ ~~Cora~~

~~Ann + Carl~~
Betsy + Carl
~~Cora + Ben~~
Ann + Ben
Cora + Alex

Aufgabe 16.3

Eine Zuordnung, die jeder Person des einen Geschlechts umkehrbar eindeutig eine Person des anderen Geschlechts zuordnet. Dies lässt sich mittels eines sogenannten Graphen darstellen:



Aufgabe 16.4

Wenn es eine Frau f gibt, die ihren derzeitigen Partner m für einen anderen Mann m' verlassen würde, der wiederum bereit ist, seine derzeitige Partnerin f' für f zu verlassen.

Aufgabe 16.5

Ja, es lässt sich immer ein stabiles Matching finden.

Aufgabe 16.6

Das stabile Matching ist optimal aus der Sicht der Antragssteller.

Aufgabe 16.7

- *National Resident Matching Program:* Zuordung von Medizinstudenten auf Praktikumsplätze an amerikanischen Universitätskliniken.
- *New York City's High School Application Process:* Matching zwischen Schulen und Schülern mit jeweiligen Prioritäten (Ortsnähe, Geschwister, Fächerprofil, ...).
- *Content delivery Networks:* Matching zwischen Webclients und Webservern, wobei das Prioritätskriterium aus kurzen Antwortzeiten besteht.