Mathematik-Examen 2021
Übungsaufgaben 5e (L)

Version vom 6. Juli 2021

Aufgabe 1.1

zum Beispiel $x_n = 4 - 10^{-n}$ oder $x_n = 4 - \frac{1}{n}$

Aufgabe 1.2

zum Beispiel $x_n = -2 + 10^{-n}$ oder $x_n = -2 + \frac{1}{n}$

Aufgabe 1.3

11

Aufgabe 1.4

(a) ∞

(b) $-\infty$

Aufgabe 1.5

(a) $-\infty$

(b) ∞

Aufgabe 1.6

$\frac{4}{3}$

Aufgabe 1.7

$-\frac{1}{8}$

Aufgabe 1.8

0

Aufgabe 1.9 (neu)

(a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x - 1) = \cdots = 2$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \cdots = 4$ [faktorisieren und kürzen]

(c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1 - x} = \infty$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^9}{2^x} = 0$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \sin(x)$ exisitiert nicht

(f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Aufgabe 2.1

Sie Fundamentum Seite …

Aufgabe 2.2

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \cdots = 0$$

Aufgabe 2.3

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \cdots = 3$$

Aufgabe 2.4

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \cdots = 6$$

Aufgabe 2.5

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \cdots = 12$$

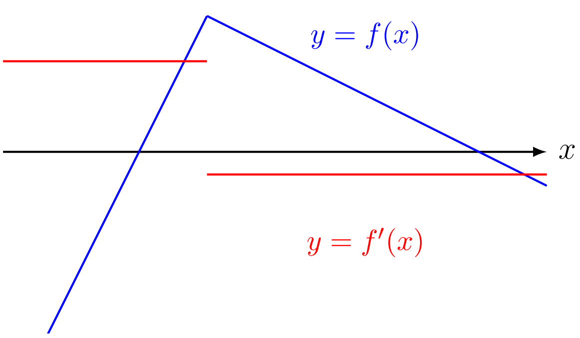
Aufgabe 2.6

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

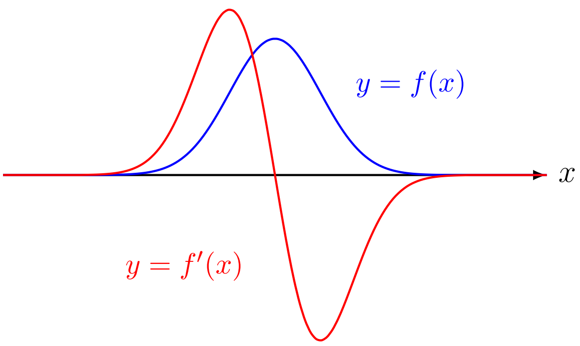
Aufgabe 2.7

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \cdots = -\frac{1}{25}$$

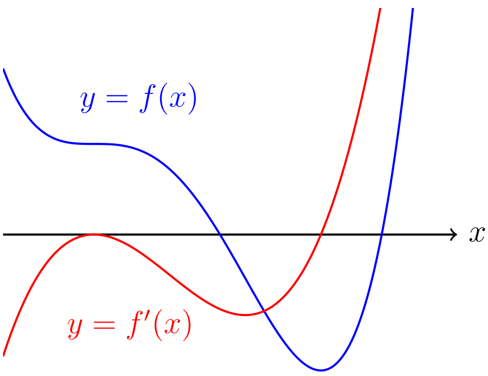
Aufgabe 2.8



Aufgabe 2.9


$y = f(x)$
x
$y = f'(x)$

Aufgabe 2.10



Aufgabe 3.1

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots = 1$$

Aufgabe 3.2

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots = 2x$$

Aufgabe 3.3

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots = 3x^2$$

Aufgabe 3.4

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 3.5

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cdots = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 3.6

$t\colon y = x + 1$

Aufgabe 3.7

$n\colon y = -4x + 18$

Aufgabe 3.8

$t\colon y = x - 1$

Aufgabe 3.9

$n\colon y = -x$

Aufgabe 3.10

$t\colon y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Aufgabe 4.1

$f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

Aufgabe 4.2

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}$ oder umgestellt: $\dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}$

Aufgabe 4.3

$f'(x) = 3\cos(3x)$

Aufgabe 4.4

$f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 4.5

$f'(x) = 14(2x - 3)^6$

Aufgabe 4.6

$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x$

Aufgabe 4.7

$f'(x) = (x^2 - 2x - 3)\mathrm{e}^x$

Aufgabe 4.8

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Aufgabe 4.9

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Aufgabe 4.10

$f'(x) = \frac{17}{(3x+1)^2}$

Aufgabe 4.11

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

Aufgabe 4.12

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Aufgabe 4.13

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Aufgabe 4.14

$f'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+2}$

Aufgabe 4.15 (neu)

Aufgabe 5.1

Eine Funktion f ist stetig, wenn sich ihr Graph G_f ohne Absetzen des Stifts zeichnen lässt.

Aufgabe 5.2

Damit die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist, muss $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ erfüllt sein.

Aufgabe 5.3

Alle Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig.

Aufgabe 5.4

f ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig (Definitionslücke) und hat dort einen *Pol ohne Vorzeichenwechsel*.

Aufgabe 5.5

f ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig und hat dort eine *hebbare Definitionslücke.*

Aufgabe 5.6

f ist an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

Aufgabe 5.7

f ist an der Stelle $x_0 = 3$ nicht stetig (Definitionslücke) und hat dort einen *Pol mit Vorzeichenwechsel.*

Aufgabe 5.8

f ist an der Stelle $x_0 = -1$ nicht stetig und hat dort eine *Sprungstelle.*

Aufgabe 5.9

(a) $a = 1.25$

(b) an der Stelle $x_0 = 3$ nicht differenzierbar

Aufgabe 6.1

Eine Funktion f ist im Intervall I monoton wachsend, wenn für alle x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_1$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Für streng monoton wachsend muss $f(x_1) < f(x_2)$ gelten.

Aufgabe 6.2

Eine Funktion f ist im Intervall I monoton fallend, wenn für alle x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_1$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Für streng monoton fallend muss $f(x_1) > f(x_2)$ gelten.

Aufgabe 6.3

Eine differenzierbare Funktion f ist an der Stelle x_0 ...

- streng monoton wachsend, wenn gilt: $f'(x_0) > 0$
- streng monoton fallend, wenn gilt: $f'(x_0) < 0$

Aufgabe 6.4

f ist an der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend.

Aufgabe 6.5

- $(-\infty, -2]$: (streng) monoton wachsend
- $[-2, 3]$: (streng) monoton fallend
- $[3, \infty)$: (streng) monoton wachsend

Aufgabe 6.6

- $(-\infty, -2]$: (streng) monoton wachsend
- $[-2, 3]$: (streng) monoton fallend
- $[3, \infty)$: (streng) monoton wachsend

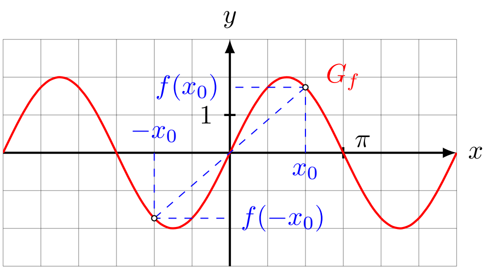
Aufgabe 7.1

Der Graph G_f einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn *für alle* $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = f(x)$. Funktionen mit dieser Eigenschaft werden *gerade* genannt.

Aufgabe 7.2

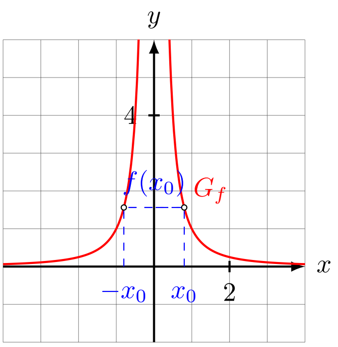
Der Graph G_f einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn *für alle* $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = -f(x)$. Funktionen mit dieser Eigenschaft werden *ungerade* genannt.

Aufgabe 7.3



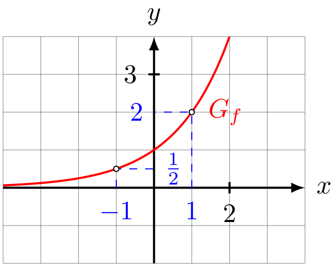
symmetrisch zum Ursprung $[\forall x \in \mathbb{R}\colon f(-x) = -f(x)]$

Aufgabe 7.4



symmetrisch zur Ordinate $[\forall x \in \mathbb{R}\colon f(-x) = f(x)]$

Aufgabe 7.5



weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

Aufgabe 7.6

G_f ist symmetrisch zur y-Achse, denn durch Nachrechnen zeigt man, dass für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = \cdots = f(x)$.

Aufgabe 7.7

G_f ist symmetrisch zum Ursprung, denn durch Nachrechnen zeigt man, dass für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = \cdots = -f(x)$.

Aufgabe 7.8

G_f ist symmetrisch zum Ursprung, denn durch Nachrechnen zeigt man, dass für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = \cdots = -f(x)$.

Aufgabe 7.9

G_f ist symmetrisch zum Ursprung, denn durch Nachrechnen zeigt man, dass für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = \cdots = -f(x)$.

Aufgabe 7.10

G_f ist symmetrisch zur y-Achse, denn durch Nachrechnen zeigt man, dass für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = \cdots = f(x)$.

Aufgabe 7.11

G_f ist symmetrisch zur y-Achse. Daher gilt ebenfalls $f(-4) = 3$.

Aufgabe 7.12

Für jede ungerade Funktion f gilt $f(0) = 0$.

Aufgabe 7.13 (neu)

(a) f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung

(b) f ist weder gerade noch ungerade; also keine uns bekannte Symmetrie

(c) f ist gerade; also ist G_f symmetrisch zur y-Achse

(d) f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung

(e) f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung

(f) f ist ungerade; also ist G_f symmetrisch zum Ursprung
(Der „unsymmetrische Term $(x-3)$“ lässt sich wegkürzen.)

Aufgabe 8.1

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \cdots = \infty$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \cdots = -\infty$

Aufgabe 8.2

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \cdots = 0$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \cdots = \infty$

Aufgabe 8.3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^9}{2^x} = 0$$

Aufgabe 8.4

- $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Aufgabe 8.5

$\lim_{x \to \infty} \sin(x)$ ist nicht definiert

Aufgabe 8.6

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$$

Aufgabe 8.7

$$\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) = 0$$

Aufgabe 8.8

$$\lim_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

Aufgabe 8.9

- senkrete Asymptote: $x = 1$
- horizontale Asymptote: $y = 2$

Aufgabe 8.10

- senkrete Asymptote: $x = 1$
- horizontale Asymptote: $y = 2$

Aufgabe 8.11

- senkrete Asymptote: $x = 1$
- horizontale Asymptote: $y = 2$

Aufgabe 8.12 (neu)

Aufgabe 9.1

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = (-4) \cdot (-1) \cdot (-5) = -20$

Nullstellen: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{5}$

Aufgabe 9.2

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 2$

Nullstelle: $x_1 = -2$

Aufgabe 9.3

$D = [7, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon 7 \leq x < \infty\}$

Ordinatenabschnitt: existiert nicht

Nullstelle: $x = 7$

Aufgabe 9.4

$D = [-5, 5] = \{x \in \mathbb{R} \colon -5 \leq x \leq 5\}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 5$

Nullstellen: $x_1 = -5$, $x_5 = 5$

Aufgabe 9.5

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 1$

Nullstellen: keine

Aufgabe 9.6

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 12$

Nullstellen: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

Aufgabe 9.7

$D = (0.5, \infty)$

Ordinatenabschnitt: existiert nicht

Nullstellen: $x = 1$

Aufgabe 9.8

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \ln(9)$

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

Aufgabe 9.9

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Nullstellen: $x_k = \dfrac{\pi(k-1)}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Aufgabe 9.10

$D = \mathbb{R}$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = -1$

Nullstellen: $x_k = 3\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Aufgabe 9.11

Nullstellen: $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$

Aufgabe 9.12

Nullstellen: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$

Aufgabe 9.13

Nullstellen: $x_1 = 3$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$

Aufgabe 9.14 (neu)

(a) Ordinatenabschnitt: $y = b$; Nullstelle(n): $x = -b/a$

(b) Ordinatenabschnitt: $y = 2$; Nullstelle(n): $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

(c) Ordindatenabschnitt: nicht definiert; Nullstelle(n): $x_{1,2} = \pm 3$

(d) Ordinatenabschnitt: $y = \ln(7)$; Nullstelle(n): $x = 2$

(e) Ordinatenabschnitt: $y = -4$; Nullstelle(n): $x = 4$

(f) Ordinatenabschnitt: $y = 1$; Nullstelle(n): keine

(g) Ordinatenabschnitt: $y = 0$; Nullstelle(n): $\{x + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(h) Ordinatenabschnitt: $f(0) = -3$; Nullstellen (Horner-Schema): $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$

Aufgabe 10.1

$T_2(x) = \cdots = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 10.2

$T_2(x) = \cdots = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$

Aufgabe 10.3

$T_2(x) = \cdots = x^2 - 3x + 3$

Aufgabe 10.4

$T_2(x) = \cdots = x$

Aufgabe 10.5

$T_2(x) = \cdots = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

Aufgabe 10.6

$T_2(x) = \cdots = x^2 + 8x + 2$

Aufgabe 11.1

$\mathrm{HoP}\big(0, 0\big)$; $\mathrm{TiP}\big(4, -32\big)$

Aufgabe 11.2

einziger Extrempunkt: $\mathrm{TiP}\big(0, 6\big)$
$\mathrm{TeP}\big(2, -\frac{14}{3}\big)$ ist Terrassenpunkt

Aufgabe 11.3

$a = 5$; Hochpunkt

Aufgabe 11.4

Es kann die Funktion maximal 7 Extrempunkte haben.

Aufgabe 12.1

Die Funktion hat keine Wendepunkte, was auch nicht verwunderlich ist, da ihr Graph eine Parabel ist.

Aufgabe 12.2

$\mathrm{WeP}_1(1, -4)$, $\mathrm{WeP}_2(2, -9)$

Aufgabe 12.3

Für $a = 3$ erhalten wir einen Wendepunkt an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 12.4

(a) Bestimme die möglichen Wendestellen.

(b) Setze die Wendestellen in die 1. Ableitung ein

Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Terrassenpunkt.

Aufgabe 12.5

Die Polynomfunktion kann maximal 5 Wendepunkte haben.

Aufgabe 13.1

(a) Zeite mit der Definition des Skalarprodukts, dass für zwei orthonormierte Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ gilt:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

(b) Zeige mit (a), dass

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2\right) \cdot \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2\right) = \cdots = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

folgt.

Aufgabe 13.2

$\varphi = 60^\circ$

Aufgabe 13.3

$\varphi = 30^\circ$

Aufgabe 13.4

Die Vektoren stehen senkrecht, wenn $t = -1$ oder wenn $t = -3$ ist.

Aufgabe 13.5

$\sphericalangle(d_1, d_2) = \cdots = \arccos \dfrac{6}{\sqrt{70}} = 44.18°$

Aufgabe 13.6

Die Dokumente d_1 und d_3 haben die kleinste Dokumentdistanz.

Aufgabe 13.7

(a) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \cdots = \begin{pmatrix} 60 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) = \cdots = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14.1

(a) $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(b) Die Länge von $\vec{c}$ entspricht der Flächenmasszahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(c) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*; d.h. dreht man den Vektor $\vec{a}$ auf kürzestem Wege in die Richtung von Vektor $\vec{b}$, so zeigt der Vektor $\vec{c}$ in die Richtung einer Rechtsschraube.

Aufgabe 14.2

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \cdots = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14.3

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

$F = |\vec{n}| = \cdots = 9\,\text{FE}$ (Flächenheinheiten)

Aufgabe 14.4

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$F = \frac{1}{2}|\vec{n}| = 7$

Aufgabe 14.5

(a) ergibt eine Zahl

(b) ist nicht definiert; der erste Faktor ist eine Zahl und kein Vektor

(c) ergibt einen Vektor

Aufgabe 15.1

Ordnungsstatistik: 2, 3, 3, 5, 7

empirischer Mittelwert: $\overline{x} = 4$

empirische Varianz: $s^2 = 4$; empirische Standardabweichung: $s = 2$

$x_{\min} = 2$; $q_1 = 2.5$; $\tilde{x} = q_2 = 3$; $q_3 = 6$; $x_{\max} = 7$

Interquartilabstand: IQR = 3.5; Spannweite: $R = 5$

Modus: 3

Aufgabe 15.2

Ordnungsstatistik: 1, 1, 3, 5, 6, 8 (Stichprobe)

empirischer Mittelwert: $\overline{x} = 4$;

empirische Varianz: $s^2 = 8$; empirische Standardabweichung: $s = 2.8284$

$x_{\min} = 1$; $q_1 = 1$; $\tilde{x} = 4$; $q_3 = 6$; $x_{\max} = 8$;

R = 7; IQR = 5

Modus = 1

Aufgabe 15.3

Das arithmetische Mittel wird stark durch Werte beeinflusst, die sehr viel grösser oder kleiner sind als das arithmetische Mittel der übrigen Werte (*Ausreisser*), was beim Median nicht der Fall ist.

Aufgabe 15.4

$c = 6$

Aufgabe 15.5

(a) Für die Berechnung des arithmetischen Mittels benötigt man mindestens intervallskalierte Merkmalswerte.

(b) Für die Berechnung des Modus genügen mindestens nominalskalierte Merkmalswerte.

(c) Für die Berechnung des Medians benötigt man mindestens ordinalskalierte Mermkalswerte.

Aufgabe 16.1

Paare: Carl + Betsy, Ben + Ann, Alex + Cora

Aufgabe 16.2

Paare: Betsy + Carl, Ann + Ben, Cora + Alex

Aufgabe 16.3

Eine umkehrbar eindeutige Abbildung, die jeder Person des einen Geschlechts genau eine Person des anderen Geschlechts zuordnet.

Aufgabe 16.4

Wenn es eine Frau f gibt, die ihren derzeitigen Partner m für einen anderen Mann m' verlassen würde, der wiederum bereit ist, seine derzeitige Partnerin f' für f zu verlassen.

Aufgabe 16.5

Ja

Aufgabe 16.6

Das stabile Matching ist optimal aus der Sicht der Antragssteller.

Aufgabe 16.7

- Zuordnung von Studierenden (Schülern) auf Studienplätze (Schulen)
- Zuordnung von Websurfern auf Webserver