Mathematik-Examen 2021

Übungsaufgaben 5e

Version vom 6. Juli 2021

Aufgabe 1.1

Gib die ersten drei Glieder einer Folge (x_n) an, die von links gegen $x = 4$ konvergiert. Wie lautet die explizite Definition dieser Folge?

Aufgabe 1.2

Gib die ersten drei Glieder einer Folge (x_n) an, die von rechts gegen $x = -2$ konvergiert. Wie lautet die explizite Definition dieser Folge?

Aufgabe 1.3

$\lim\limits_{x \to 4}(3x - 1)$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{2}{x-5}$

(b) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{2}{x-5}$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{3-x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{3-x}$

Aufgabe 1.6

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 4x}{3x - 6}$

Aufgabe 1.7

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15}$

Aufgabe 1.8

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^7}{2^x}$

Aufgabe 1.9 (neu)

Bestimme den Grenzwert, sofern er existiert.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x - 1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1 - x}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^9}{2^x}$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$

Aufgabe 2.1

Erläutere den Begriff des Differentialquotienten einer Funktion f an der Stelle x_0 anhand einer Skizze.

Aufgabe 2.2

Bestimme den Differenzialquotienten der Funktion $f\colon y = 5$ an der Stelle $x_0 = -1$, indem du den zugehörigen Grenzwert berechnest.

Aufgabe 2.3

Bestimme den Differenzialquotienten der Funktion $f\colon y = 3x - 1$ an der Stelle $x_0 = 2$, indem du den zugehörigen Grenzwert berechnest.

Aufgabe 2.4

Bestimme den Differenzialquotienten der Funktion $f\colon y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$, indem du den zugehörigen Grenzwert berechnest.

Aufgabe 2.5

Bestimme den Differenzialquotienten der Funktion $f\colon y = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$, indem du den zugehörigen Grenzwert berechnest.

Aufgabe 2.6

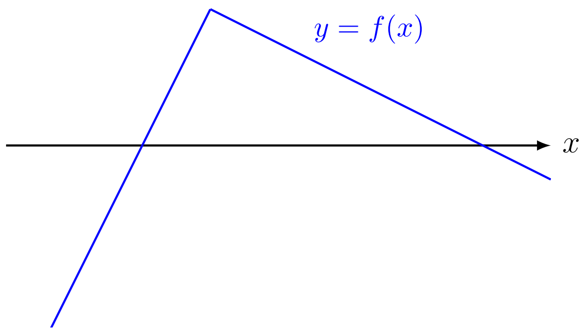
Bestimme den Differenzialquotienten der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$, indem du den zugehörigen Grenzwert berechnest.

Aufgabe 2.7

Bestimme den Differenzialquotienten der Funktion $f\colon y = 1/x$ an der Stelle $x_0 = 5$, indem du den zugehörigen Grenzwert berechnest.

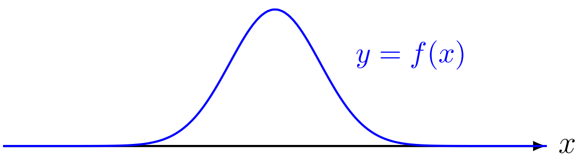
Aufgabe 2.8

Differenziere die Funktion $y = f(x)$ graphisch, indem du die den Graphen der Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ qualitativ korrekt in das Koordinatensystem einzeichnest.



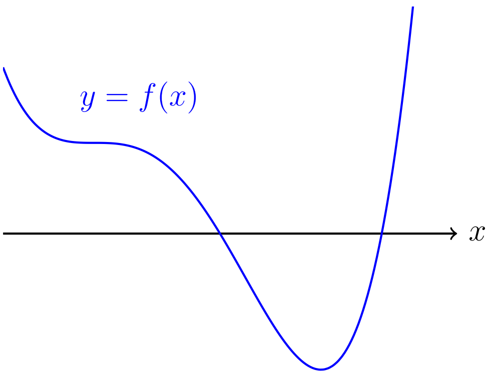
Aufgabe 2.9

Differenziere die Funktion $y = f(x)$ graphisch, indem du die den Graphen der Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ qualitativ korrekt in das Koordinatensystem einzeichnest.



Aufgabe 2.10

Differenziere die Funktion $y = f(x)$ graphisch, indem du die den Graphen der Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ qualitativ korrekt in das Koordinatensystem einzeichnest.



Aufgabe 3.1

Bestimme die Ableitungsfunktion von $f\colon y = x$ über den Differenzialquotienten.

Aufgabe 3.2

Bestimme die Ableitungsfunktion von $f\colon y = x^2$ über den Differenzialquotienten.

Aufgabe 3.3

Bestimme die Ableitungsfunktion von $f\colon y = x^3$ über den Differenzialquotienten.

Aufgabe 3.4

Bestimme die Ableitungsfunktion von $f\colon y = \sqrt{x}$ über den Differenzialquotienten.

Aufgabe 3.5

Bestimme die Ableitungsfunktion von $f\colon y = 1/x$ über den Differenzialquotienten.

Aufgabe 3.6

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f\colon y = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 3.7

Bestimme die Gleichung der Normale zum Graphen der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 3.8

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f\colon y = \ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 3.9

Bestimme die Gleichung der Normalen zum Graphen der Funktion $f\colon y = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 3.10

Bestimme die Gleichung der Normalen zum Graphen der Funktion $f\colon y = 1/x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 4.1

Gegeben: $f(x) = x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x + 4$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.2

Gegeben: $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.3

Gegeben: $f(x) = \sin(3x)$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.4

Gegeben: $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.5

Gegeben: $f(x) = (2x-3)^7$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.6

Gegeben: $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.7

Gegeben: $f(x) = (x^2 - 4x + 1) \cdot \mathrm{e}^x$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.8

Gegeben: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.9

Gegeben: $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.10

Gegeben: $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x+1}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.11

Gegeben: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.12

Gegeben: $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.13

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.14

Gegeben: $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+2}$

Gesucht: $f'(x)$

Aufgabe 4.15 (neu)

Bestimme die Ableitung der Funktion.

(a) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

(b) $f(x) = 3\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

(c) $f(x) = \sin(3x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(x) =$

(e) $f(x) = x \cdot \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

(f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$

Aufgabe 5.1

Erkläre den Stetigkeitsbegriff anschaulich.

Aufgabe 5.2

Erkläre formal: Wann ist eine Funktion f (an der Stelle x_0) stetig?

Aufgabe 5.3

Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(a) $f\colon y = 3x + 8$

(b) $f\colon y = 2x^2 - 3x + 5$

(c) $f\colon y = 1/x^2$

(d) $f\colon y = \sqrt{x}$

(e) $f\colon y = \mathrm{e}^x$

(f) $f\colon y = \ln x$

(g) $f\colon y = \sin x$

(h) $f\colon y = \cos x$

(i) $f\colon y = \tan x$

(j) $f\colon y = |x|$

Aufgabe 5.4

Untersuche, ob die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist. Falls nicht, beschreibe die Unstetigkeit mit dem passenden Fachausdruck.

Aufgabe 5.5

Untersuche, ob die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist. Falls nicht, beschreibe die Unstetigkeit mit dem passenden Fachausdruck.

Aufgabe 5.6

Untersuche, ob die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{für } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist. Falls nicht, beschreibe die Unstetigkeit mit dem passenden Fachausdruck.

Aufgabe 5.7

Untersuche, ob die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$$

an der Stelle $x_0 = 3$ stetig ist. Falls nicht, beschreibe die Unstetigkeit mit dem passenden Fachausdruck.

Aufgabe 5.8

Untersuche, ob die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{für } x \leq -1 \\ x - \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = -1$ stetig ist. Falls nicht, beschreibe die Unstetigkeit mit dem passenden Fachausdruck.

Aufgabe 5.9

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - a & \text{für } x < 3 \\ ax + 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Bestimme den Wert des Parameters a, so dass die stückweise definierte Funktion f überall stetig ist.

(b) Untersuche, ob für diesen Wert die Funktion auch überall differenzierbar ist.

Aufgabe 6.1

Beschreibe formal, wann eine Funktion f im Intervall $I \subset D_f$ (streng) monoton wachsend ist. (Eine Skizze kann helfen.)

Aufgabe 6.2

Beschreibe formal, wann eine Funktion f im Intervall $I \subset D_f$ (streng) monoton fallend ist. (Eine Skizze kann helfen.)

Aufgabe 6.3

Wie lässt sich das Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion an einer Stelle x_0 bestimmen?

Aufgabe 6.4

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion $f\colon y = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 6.5

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion $f\colon y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 6.6

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion $f\colon y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 1$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 7.1

Welche Bedingung muss eine Funktion f erfüllen, damit ihr Graph G_f symmetrisch zur y-Achse ist? Wie werden solche Funktionen auch genannt? (Eine Skizze kann hilfreich sein.)

Aufgabe 7.2

Welche Bedingung muss eine Funktion f erfüllen, damit ihr Graph G_f symmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$ ist? Wie werden solche Funktionen auch genannt? (Eine Skizze kann hilfreich sein.)

Aufgabe 7.3

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = 2\sin x$ und beschreibe seine Symmetrie.

Aufgabe 7.4

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = 1/x^2$ und beschreibe seine Symmetrie.

Aufgabe 7.5

Skizziere den Graphen der Funktion $f\colon y = 2^x$. und beschreibe seine Symmetrie.

Aufgabe 7.6

Untersuche die Funktion $f\colon y = x^4 - 3x^2 + 5$ auf Symmetrie.

Aufgabe 7.7

Untersuche die Funktion $f\colon y = x^3 - 6x$ auf Symmetrie.

Aufgabe 7.8

Untersuche die Funktion $f\colon y = x^2 + 2x - 1$ auf Symmetrie.

Aufgabe 7.9

Untersuche die Funktion $f\colon y = x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$ auf Symmetrie.

Aufgabe 7.10

Untersuche die Funktion $f\colon y = \dfrac{x^3 + x}{\sin x}$ auf Symmetrie.

Aufgabe 7.11

Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse und hat an der Stelle $x = 4$ den Wert 3. Welchen Wert hat f an der Stelle $x = -4$?

Aufgabe 7.12

Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zum Ursprung. Welchen Wert hat f an der Stelle $x = 0$?

Aufgabe 7.13 (neu)

Untersuche den Graphen der Funktion f auf eine allfällige Symmetrieeigenschaft.

(a) $f(x) = x^3 - 4x$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

(d) $f(x) = \sin(x)$

(e) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 5}{x^3 - x}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} \quad (x \neq 3)$

Aufgabe 8.1

Gegeben: $f\colon y = x^2 - x^3$

Gesucht: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Aufgabe 8.2

Gegeben: $f\colon y = \mathrm{e}^x$

Gesucht: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

Aufgabe 8.3

Gegeben: $f\colon\, y = \dfrac{x^9}{2^x}$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Aufgabe 8.4

Gegeben: $f\colon\, y = \ln x$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Aufgabe 8.5

Gegeben: $f\colon\, y = \sin(x)$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Aufgabe 8.6

Gegeben: $f\colon\, y = \sqrt{x}$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Aufgabe 8.7

Gegeben: $f\colon\, y = x \cdot \ln x$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Aufgabe 8.8

Gegeben: $f\colon\, y = \cos \dfrac{1}{x}$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Aufgabe 8.9

Bestimme die Gleichungen aller Asymptoten der Funktion $f\colon\, y = \dfrac{2x}{x-1}$.

Aufgabe 8.10

Bestimme die Gleichungen aller Asymptoten der Funktion $f\colon y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

Aufgabe 8.11

Bestimme die Gleichungen aller Asymptoten der Funktion $f\colon y = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 1}$.

Aufgabe 8.12 (neu)

(a) Bestimme das asymptotische Verhalten der Funktion f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

- $f(x) = x^2 - x^3$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$
- $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(b) Bestimme die Gleichung der Asymptote der Funktion $f\colon y = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 1}$.

Aufgabe 9.1

Gegeben: $f\colon y = (x - 4)(2x - 1)(x^2 - 5)$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.2

Gegeben: $f\colon y = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.3

Gegeben: $f\colon y = \sqrt{x - 7}$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.4

Gegeben: $f\colon y = \sqrt{25 - x^2}$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.5

Gegeben: $f\colon y = \mathrm{e}^{x^2}$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.6

Gegeben: $f\colon y = (x^2 - 7x + 12)\mathrm{e}^x$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.7

Gegeben: $f\colon y = \ln(2x - 1)$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.8

Gegeben: $f\colon y = \ln\left(x^2 - 6x + 9\right)$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.9

Gegeben: $f\colon y = \sin(2x + \pi)$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.10

Gegeben: $f\colon y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$
Gesucht: Definitionsbereich, Ordinatenabschnitt und Nullstellen

Aufgabe 9.11

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f\colon y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$, wenn bekannt ist, dass sie alle ganzzahlig sind.

Aufgabe 9.12

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f\colon y = 2x^4 - 21x^3 + 72x^2 - 91x + 30$, wenn bekannt ist sie alle positiv sind, und es sich bei dreien um Primzahlen handelt.

Aufgabe 9.13

Bestimme die Nullstellen der Funktion $f\colon y = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$, wenn bekannt ist, dass eine davon ganzzahlig ist und die übrigen irrational sind.

Bestimme Ordinatenabschnitt und Nullstellen der Funktion f.

(a) $f(x) = ax + b \quad (a,\, b \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = x^2 - x + 2$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

(d) $f(x) = \ln(7 - 3x)$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(g) $f(x) = \sin(x)$

(h) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ (alle Nullstellen sind ganzzahlig)

Aufgabe 10.1

Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon y = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 10.2

Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon y = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ und vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 10.3

Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ und vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 10.4

Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon y = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 10.5

Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon y = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 10.6

Bestimme das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon y = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ und vereinfache den Term so weit wie möglich.

Aufgabe 11.1

Bestimme die Extrempunkte der Funktion $f\colon y = x^3 - 6x^2$.

Aufgabe 11.2

Bestimme die Extrempunkte der Funktion $f\colon y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 6$.

Aufgabe 11.3

Bestimme den Wert des Parameters a so, dass die Funktion $f\colon y = x^3 + ax^2 + 7x - 3$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Extrempunkt hat. Um welche Art von Extrempunkt handelt es sich?

Aufgabe 11.4

Wie viele Extrempunkte kann eine Polynomfunktion vom Grad 8 maximal haben?

Aufgabe 12.1

Bestimme die Wendepunkte der Funktion $f\colon y = x^2 - 4x + 3$.

Aufgabe 12.2

Bestimme die Wendepunkte der Funktion $f\colon y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$.

Aufgabe 12.3

Bestimme den Wert des Parameters a so, dass die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + 7x + 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Wendepunkt hat.

Aufgabe 12.4

Untersuche, ob der Graph der Funktion $f\colon y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1$ Terrassenpunkte besitzt.

Aufgabe 12.5

Wie viele Wendepunkte kann eine Polynomfunktion vom Grad 7 maximal haben?

Aufgabe 13.1

Zeige, wie das Skalarprodukt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

dargestellt werden kann, wenn $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ eine orthonormierte Basis ist.

Aufgabe 13.2

Berechne den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13.3

Berechne den Winkel β im Dreieck mit den Ecken $A(9, 4, 6)$, $B(8, 2, 5)$ und $C(12, 5, 10)$.

Aufgabe 13.4

Für welche Werte des Parameters t stehen die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

senkrecht aufeinander?

Aufgabe 13.5

Berechne die Dokumentdistanz zwischen den Dokumenten

$d_1 =$ `"to be or not to be"`

$d_2 =$ `"to be is to do"`

Aufgabe 13.6

Welche zwei der drei Dokumente haben die kleinste Dokumentdistanz? Begründe die Antwort mit einer Rechnung.

$d_1 =$ `"so was ist das da"`

$d_2 =$ `"das ist so nicht"`

$d_3 =$ `"da ist was nicht so"`

Aufgabe 13.7

Berechne mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

(b) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

Aufgabe 14.1

Zähle die drei Eigenschaften auf, durch die das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ definiert ist.

Aufgabe 14.2

Berechne mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$:

(a) $\vec{a} \times \vec{b}$

(b) $\vec{b} \times \vec{a}$

Aufgabe 14.3

Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe 14.4

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A(1, 4, 2)$, $B(8, 12, 11)$ und $C(4, 8, 5)$.

Aufgabe 14.5

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind Vektoren im dreidimensionalen Raum. Gib an, ob der folgende Ausdruck definiert ist und wenn ja, ob es sich beim Resultat um eine Zahl oder um einen Vektor handelt.

(a) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

(b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \times \vec{c}$

(c) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$

Aufgabe 15.1

Bestimme die exakten Werte der unten genannten Kennzahlen für eine Stichprobe mit den Werten $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 3$, $x_5 = 7$

- Mittelwert, Varianz und Standardabweichung
- Median, Quartile, Spannweite und Interquartilsabstand
- Modus

Aufgabe 15.2

Bestimme die exakten Werte der unten genannten Kennzahlen für eine Stichprobe mit den Werten 3, 1, 5, 1, 8, 6.

- Mittelwert, Varianz und Standardabweichung
- Median, Quartile, Spannweite und Interquartilsabstand
- Modus

Aufgabe 15.3

Nenne einen charakteristischen Unterschied zwischen dem arithmetischen Mittel und dem Median wenn man einmal von der Art der Berechnung absieht.

Aufgabe 15.4

Eine sehr kleine Stichprobe besteht aus den Werten $x_1 = 2$ und $x_2 = c$. Berechne den Wert des Parameters c, wenn die empirische Varianz $s^2 = 8$ beträgt.

Aufgabe 15.5

Welches minimale Skalenniveau müssen die Ausprägungen eines statistischen Merkmals haben, um die angegebene Kennzahl zu berechnen.

(a) arithmetisches Mittel

(b) Modus

(c) Median

Aufgabe 16.1

Bestimme mit dem Algorithmus von Gale-Shapley ein stabiles Matching, wenn die Herren die Anträge stellen.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Alex	Betsy	Ann	Cora
Ben	Betsy	Ann	Cora
Carl	Betsy	Ann	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Ann	Carl	Ben	Alex
Betsy	Carl	Ben	Alex
Cora	Ben	Carl	Alex

Aufgabe 16.2

Bestimme mit dem Algorithmus von Gale-Shapley ein stabiles Matching, wenn die Damen die Anträge stellen.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Ann	Carl	Ben	Alex
Betsy	Carl	Ben	Alex
Cora	Ben	Carl	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Alex	Betsy	Ann	Cora
Ben	Betsy	Ann	Cora
Carl	Betsy	Ann	Cora

Aufgabe 16.3

Was ist ein *Matching* im *Stable Marriage Problem*?

Aufgabe 16.4

Beschreibe, wann ein Matching im *Stable Marriage Problem* nicht stabil ist.

Aufgabe 16.5

Lässt sich mit Hilfe des Algorithmus von Gale-Shapley immer ein stabiles Matching finden?

Aufgabe 16.6

In welcher Hinsicht ist das stabile Matching, das mit dem Gale-Shapley-Algorithmus gefunden wird optimal?

Aufgabe 16.7

Nenne mindestens zwei weitere reale Anwendungen, die mit dem Stable Marriage Problem verwandt sind.