

Aufgabe 1

$$(a) -10 \cdot \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.4 \\ 2.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 74 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 + 2 - 14 = 0$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12 \\ 4 - 4 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (d)
- Die Vektoren in (b) sind orthogonal (senkrecht).
 - Die Vektoren in (c) sind kollinear (parallel), da sie eine Fläche mit dem Inhalt 0 einschliessen.

Aufgabe 2

$$(a) \vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$2t + 7 - 15 = 0$$

$$2t = 8$$

$$t = 4$$

$$(b) \vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ t \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$-7t + t^2 + 10 = 0$$

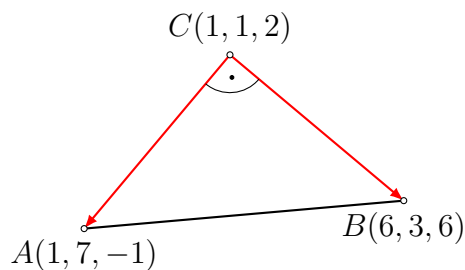
$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$(t - 2)(t - 5) = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 5$$

Aufgabe 3



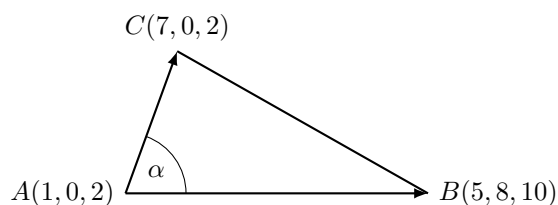
$$\vec{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{CA}\| = \sqrt{0 + 36 + 9} = \sqrt{45} \\ \|\vec{CB}\| = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ABC ist gleichschenkelig}$$

Aufgabe 4



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

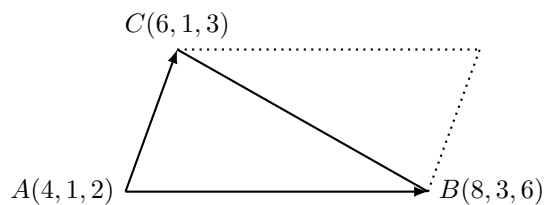
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24 + 0 + 0 = 24$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{36 + 0 + 0} = 6$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{24}{12 \cdot 6} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70.5^\circ$$

Aufgabe 5



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6 \quad \Rightarrow \quad F_{ABC} = \frac{6}{2} = 3$$

Aufgabe 6

Die Richtung der x -Achse wird zum Beispiel vom Vektor $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ repräsentiert.

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1 + 0 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e}_1\|} = \frac{1}{9 \cdot 1} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 83.6^\circ$$

Aufgabe 7

Vektor senkrecht zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{36 + 64 + 0} = \sqrt{100} = 10$$

Da der Normalenvektor \vec{c} die Länge 10 hat, muss er mit ± 1.5 multipliziert werden, um die Länge 15 zu bekommen. Beachte, dass es auch jeweils einen Normalenvektor mit gleicher Länge in entgegengesetzter Richtung gibt.

$$\text{Lösungen: } \vec{n}_1 = 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = -1.5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 - 6 \cdot 4 \\ 4 \cdot 5 - 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 15 \\ 21 - 24 \\ 20 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 - 9 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 21 - 15 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$