Vektorgeometrie

Examensvorbereitung

Aufgabe 1

(a) $-10 \cdot \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.4 \\ 2.9 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$

(d) Welche Eigenschaften haben die Vektoren in (b) und (c)?

Aufgabe 1

(a) $-10 \cdot \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.4 \\ 2.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 74 \\ -29 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 12 + 2 - 14 = 0$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12 \\ 4 - 4 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d)
- Die Vektoren in (b) sind orthogonal (senkrecht).
- Die Vektoren in (c) sind kollinear (parallel), da sie eine Fläche mit dem Inhalt 0 einschliessen.

Aufgabe 2

Für welchen Wert des Parameters t sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ t \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

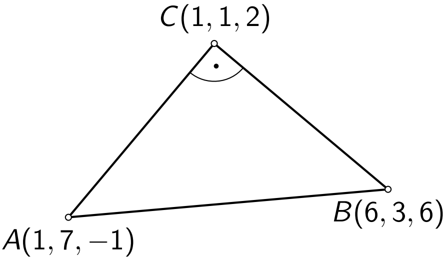
$$\begin{aligned} 2t + 7 - 15 &= 0 \\ 2t &= 8 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ t \\ 5 \end{pmatrix}$

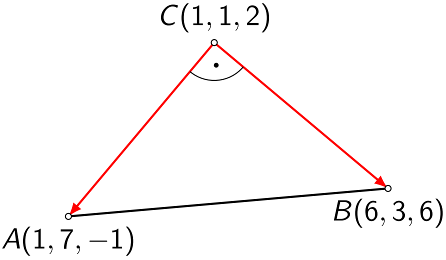
$$\begin{aligned} -7t + t^2 + 10 &= 0 \\ t^2 - 7t + 10 &= 0 \\ (t-2)(t-5) &= 0 \\ t_1 &= 2 \\ t_2 &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Weise nach, dass das skizzierte Dreieck gleichschenklig rechtwinklig ist.



Aufgabe 3



$$\overrightarrow{CA} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

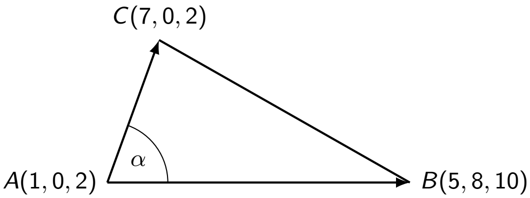
$$\overrightarrow{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90^\circ$$

Aufgabe 4

Berechne den Winkel α im Dreieck mit den Ecken $A(1, 0, 2)$, $B(5, 8, 10)$ und $C(7, 0, 2)$.

Aufgabe 4



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + 0 + 0 = 24$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$$

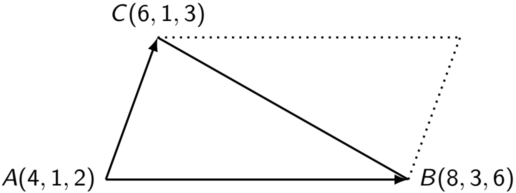
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{36 + 0 + 0} = 6$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{14}{2 \cdot 14} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70.5^\circ$$

Aufgabe 5

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $A(4, 1, 2)$, $B(8, 3, 6)$ und $C(6, 1, 3)$.

Aufgabe 5



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6 \quad \Rightarrow \quad F_{ABC} = \frac{6}{2} = 3$$

Aufgabe 6

Berechne den Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und der x-Achse.

Aufgabe 6

Die Richtung der x-Achse wird zum Beispiel vom Vektor

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ repräsentiert.

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1 + 0 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{e}_1\|} = \frac{1}{9 \cdot 1} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 83.6^\circ$$

Aufgabe 7

Bestimme alle Vektoren, die senkrecht zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen und die Länge 15 haben.

Aufgabe 7

Vektor senkrecht zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{36 + 64 + 0} = \sqrt{100} = 10$$

Da der Normalenvektor $\vec{c}$ die Länge 10 hat, muss er mit ± 1.5 multipliziert werden, um die Länge 15 zu bekommen. Beachte, dass es auch jeweils einen Normalenvektor mit gleicher Länge in entgegengesetzter Richtung gibt.

Lösungen: $\vec{n}_1 = 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\vec{n}_2 = -1.5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Berechne $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ und weise nach, dass $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ gilt.

Aufgabe 8

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 - 6 \cdot 4 \\ 4 \cdot 5 - 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 15 \\ 21 - 24 \\ 20 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 - 9 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 21 - 15 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$