Aufgabe 1

(a) Gegeben: $a_n = (n+1)^2 + 5$; Gesucht: a_4

$a_4 = (4+1)^2 + 5 = 25 + 5 = 30$

(b) Gegeben: $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = 2a_n - 1$; Gesucht: a_4

$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$

(c) Gib ein Bildungsgesetz der Folge (a_n) an.

$a_1 = 5,\ a_2 = 9,\ a_3 = 13,\ a_4 = 17,\ a_5 = 21,\ \ldots$

Der Unterschied benachbarter Folgeglieder beträgt 4. Somit handelt es sich um eine arithmetische Folge. Das Bildungsgesetz lautet daher (explizit):

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 1$

(d) Gib ein Bildungsgesetz der Folge (a_n) an.

$a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ a_4 = 11,\ a_5 = 18,\ a_6 = 29,\ \ldots$

Jedes Folgeglied ist die Summe seiner beiden Vorgänger. Das Bildungsgesetz lautet daher (rekursiv):

$a_1 = 3,\ a_3 = 4;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (oder $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$)

Aufgabe 2

(a) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

$a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 3,\ a_4 = -4,\ \ldots$

Die Folge ist alternierend, unbeschränkt und hat keinen Grenzwert.

(b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{2}{3},\ a_3 = \dfrac{3}{4},\ a_4 = \dfrac{4}{5},\ \ldots$

Die Folge ist monoton wachsend, beschränkt und hat den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Aufgabe 3

$a_n = 2n - 1$

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ \ldots$

$s_1 = 1,\ a_2 = 4,\ s_3 = 9,\ s_4 = 16,\ \ldots$

$s_n = n^2$

Aufgabe 4

$s_n = 2n^2 + n$

$s_1 = 3,\ s_2 = 10,\ s_3 = 21,\ s_4 = 36,\ \ldots$

$a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 11,\ a_4 = 15,\ \ldots$

(a_n) ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 3$ und $d = 4$

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

Aufgabe 5

(a) $$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{5}(k-3)^2 &= (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 \\ &= 1 + 0 + 1 + 4 = 6\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\sum_{k=-30}^{30}(2k+1) &= (-60+1) + (-58+1) + \cdots + (60+1) \\ &= -59 - 57 - \cdots - 1 + 1 + \cdots + 59 + 61 \\ &= 61\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(a) $$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{k+2}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{10}{9} - \frac{11}{10}\right) + \left(\frac{11}{10} - \frac{12}{11}\right)$$

$$= \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \cdots - \frac{11}{10} + \frac{11}{10} - \frac{12}{11} = \frac{2}{1} - \frac{12}{11} = \frac{10}{11}$$

(b) $$\prod_{k=1}^{100}(73-k)$$

$$= (73-1) \cdot (73-2) \cdot \ldots \cdot (73-73) \cdot \ldots \cdot (73-100) = 0$$

Aufgabe 7

(a) $\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 5!$

(c) $\prod_{k=1}^{40} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{39}{40} \cdot \frac{40}{41} = \frac{1}{41}$ (kürzen!)

Aufgabe 8

$4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + 192 + 196 = ?$

Es handelt sich um die Summe einer arithmetischen Folge, da die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d = 3$ beträgt.

Summenformel der AF: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_1 = 4$

$a_n = 196$

$n = \frac{196 - 4}{3} + 1 = \frac{192}{3} + 1 = 65$

$s_{65} = \frac{65}{2}(4 + 196) = \frac{65}{2} \cdot 200 = 100 \cdot 65 = 6\,500$

Aufgabe 9

Gegeben: AF mit $a_5 = 19$ und $a_8 = 28$

$$\begin{aligned} a_8 &= a_5 + 3d \\ 28 &= 19 + 3d \\ 9 &= 3d \\ d &= 3 \end{aligned}$$

$a_1 = a_5 - 4d = 19 - 12 = 7$

$$\begin{aligned} s_{20} &= \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20}) = 10 \cdot \big(7 + (7 + 19 \cdot 3)\big) \\ &= 10 \cdot (14 + 57) = 10 \cdot 71 = 710 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Gesucht: explizite Formel einer AF mit $a_1 = 4$ und $s_{20} = 1030$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ 1030 &= \frac{20}{2}(4 + a_{20}) \\ 103 &= 4 + a_{20} \\ a_{20} &= 99 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{20} &= a_1 + 19d \\ 99 &= 4 + 19d \\ 95 &= 19d \\ d &= 5 \end{aligned}$$

$a_n = 4 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 1$

Aufgabe 11

Gegeben: GF mit $a_2 = 6$ und $a_5 = 48$

Gesucht: a_1 und s_6

$$\begin{aligned} a_5 &= a_2 \cdot q^3 \\ 48 &= 6 \cdot 2^3 \\ 8 &= q^3 \\ q &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ 6 &= a_1 \cdot 2 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$s_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189$$

Aufgabe 12

(a) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Wegen $|q| = \frac{4}{3} \geq 1$, divergiert die Summenfolge.

(b) $a_n = 10 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

Wegen $|q| = \frac{3}{4} < 1$, konvergiert die Summenfolge und es gilt:

$$s = \lim_{n\to\infty} 10 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = 10 \cdot \frac{1 - 0}{1 + 3/4} \quad = 10 \cdot \frac{1}{7/4}$$

$$= 10 \cdot \frac{4}{7} = \frac{40}{7}$$