Aufgabe 1

(a) $a_n = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \dots$

- monoton wachsend
- nicht alternierend
- nach unten beschränkt, nicht nach oben beschränkt
- uneigentlich konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \dots$

- nicht monoton
- alternierend
- nach unten und oben beschränkt
- konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ \dots$

- monoton fallend
- nicht alternierend
- nach unten und oben beschränkt
- konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Aufgabe 2

(a) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$$ (Der Zähler wächst schneller als der Nenner.)

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+1}{2n^2+3n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+4n+1)/n^2}{(2n^2+3n+8)/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n+1/n^2}{2+3/n+8/n^2} = \frac{1}{2}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$$

Aufgabe 3

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^2$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{417} = \lim_{n\to\infty} 417^{\frac{1}{n}} = 417^0 = 1$

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3^1+1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{3^n}\right) = 3$

(d) $\lim_{n\to\infty}\sin(n)$ existiert nicht

Aufgabe 4

(a) $\lim_{x\to 2}(3x+4) = 3\cdot 2+4 = 10$

(b) $\lim_{x\to -1}\left(x-\frac{1}{x}\right) = -1-\frac{1}{-1} = -1+1 = 0$

(c) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}$

(d) $\lim_{x\to 5^+}\frac{1}{x-5} = \infty$

Aufgabe 5

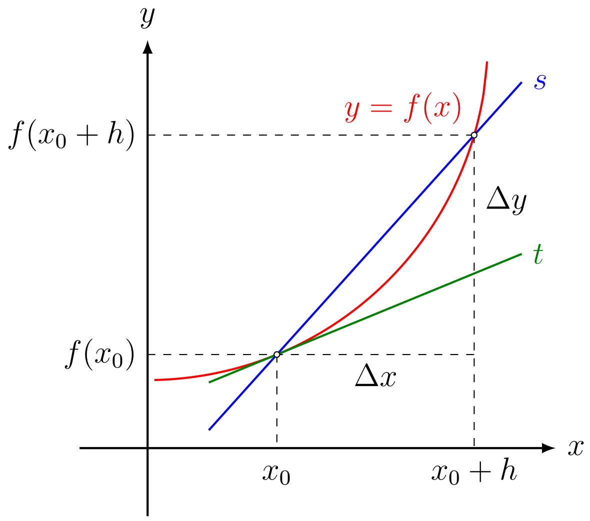
(a) $\lim_{x\to -5}(x^2+x) = (-5)^2+(-5) = 25-5 = 20$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2^x} = 0$ (Der Nenner wächst schneller als der Zähler.)

(c) $\lim_{x\to 0}\cos(x) = \cos(0) = 1$

(d) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-1) = 2$

Aufgabe 6



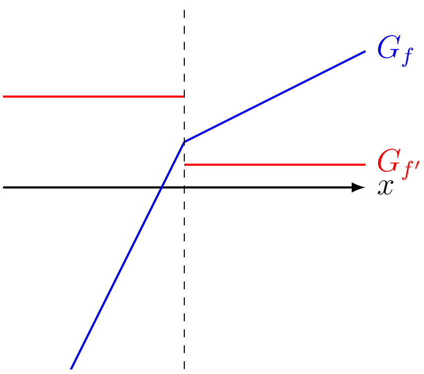
$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (Differenzialquotient)

Geometrische Deutung: Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$

Aufgabe 7

Gegeben: Graph G_f einer Funktion f

Gesucht: Graph der Ableitungsfunktion von f (qualitativ korrekt)

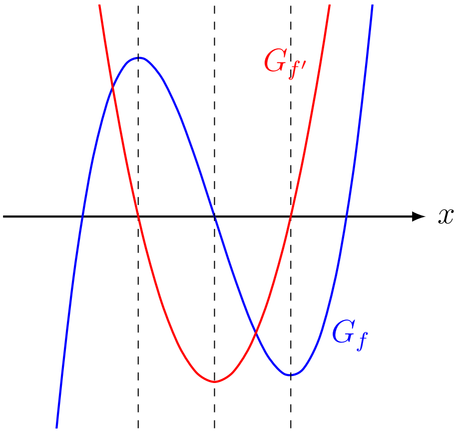


Die Funktion ist an der Stelle mit dem „Knick“ nicht differenzierbar.

Aufgabe 8

Gegeben: Graph G_f einer Funktion f

Gesucht: Graph der Ableitungsfunktion von f (qualitativ korrekt)



Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \text{ erweitern mit 3. binomische Formel} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \quad \text{gleichnamig machen} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \big(3x^2 + 3xh + h^2\big) = 3x^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 12

(a) $f(x) = x^{12}$

$f'(x) = 12x^{11}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \big(x^4\big)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Aufgabe 13

(a) $f(x) = (x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$

$f'(x) = 2x + 7$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2} = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 1 - 2x^{-1} + 3x^{-2}$

$f'(x) = 2x^{-2} - 6x^{-3} = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}$

(c) $f(x) = (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$

Aufgabe 14

Bestimme die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$

$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3 \cdot 4 = 12$

(b) $f(x) = \sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$; $x_0 = 9$

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(9) = \dfrac{1}{3}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{4x^4} = \dfrac{1}{4}x^{-4}$; $x_0 = 3$

$f'(x) = -x^{-5} = -\dfrac{1}{x^5} \quad \Rightarrow \quad f(3) = -\dfrac{1}{3^5} = -\dfrac{1}{243}$

(d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$; $x_0 = -1$

$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) = 0$

Aufgabe 15

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$
$f'(x) = x^2 - x - 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ x^2 - x - 5 &= 1 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x+2)(x-3) &= 0 \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 16

$f(x) = x^2 - 5x + 3;\ x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(2) = -3$

$f'(x) = 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad m = f'(2) = -1$

$$\begin{aligned} y_0 &= m \cdot x_0 + q \\ -3 &= -1 \cdot 2 + q \\ q &= -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$

$t\colon y = -x - 1$

Aufgabe 17

$f(x) = \sqrt{x};\ x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(4) = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m_n = -4$$

$$\begin{aligned} y_0 &= m_n \cdot x_0 + q \\ 2 &= -4 \cdot 4 + q \\ q &= 2 + 16 = 18 \end{aligned}$$

$n\colon y = -4x + 18$

Aufgabe 18

$f(x) = x^2 + 2x$
$g(x) = x^2 + x + 1$

Schnittpunkt: $\quad f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x^2 + x + 1 \\ x_S &= 1 \\ y_S &= f(x_S) = f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad S(1,3) \end{aligned}$$

Schnittwinkel: $f'(x) = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_f = f'(1) = 4$

$g'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad m_g = g'(1) = 3$

$$\varphi = \arctan\left|\frac{m_f - m_g}{1 + m_f \cdot m_g}\right| = \arctan\left|\frac{4-3}{1+12}\right| = \arctan\frac{1}{13} \approx 4.4°$$

Aufgabe 19

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c = y$

$f'(x) = 2ax + b = m$

Ordinatenabschnitt:

$f(0) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad c \overset{(1)}{=} 3$

berührt x-Achse an der Stelle $x = 2$:

$f(2) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \overset{(2)}{=} 0$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 2$:

$f'(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + b \overset{(3)}{=} 0$

$(2) - (3)$: $b + c \overset{(4)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$

Aufgabe 20

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c = y$
$f'(x) = 2ax + b = m$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f:

$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \overset{(1)}{=} 3$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 1$:

$f'(1) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 2a + b \overset{(2)}{=} 0$

Nullstelle $x = 2$:

$f(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \overset{(3)}{=} 0$

$(3) - 2 \cdot (2)$: $c = 0 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad a + b \overset{(4)}{=} 3$

$(2) - (4)$: $a = -3 \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad b = 6$

$f(x) = -3x^2 + 3x$

Aufgabe 21

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$

x	a_4	-2	-7	20	-12
1	1	-1	-8	12	0
1	1	0	-8	4	
2	1	1	-6	0	
2	1	3	0		
-3	1	0			

$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x + 3)$