

Differenzialrechnung

Examensvorbereitung

Aufgabe 1

Beschreibe möglichst viele mathematische Eigenschaften der Folgen mit Fachausdrücken.

(a) $a_n = \sqrt{n}$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

Aufgabe 1

$$(a) a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$$

Aufgabe 1

(a) $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

- ▶ monoton wachsend
- ▶ nicht alternierend
- ▶ nach unten beschränkt, nicht nach oben beschränkt
- ▶ uneigentlich konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Aufgabe 1

(a) $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

- ▶ monoton wachsend
- ▶ nicht alternierend
- ▶ nach unten beschränkt, nicht nach oben beschränkt
- ▶ uneigentlich konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

- ▶ nicht monoton
- ▶ alternierend
- ▶ nach unten und oben beschränkt
- ▶ konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Aufgabe 1

(a) $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

- ▶ monoton wachsend
- ▶ nicht alternierend
- ▶ nach unten beschränkt, nicht nach oben beschränkt
- ▶ uneigentlich konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

- ▶ nicht monoton
- ▶ alternierend
- ▶ nach unten und oben beschränkt
- ▶ konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \dots$

- ▶ monoton fallend
- ▶ nicht alternierend
- ▶ nach unten und oben beschränkt
- ▶ konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Aufgabe 2

Untersuche ob die angegebene Folge konvergent, uneigentlich konvergent oder divergent ist und gib den Grenzwert in der Limes-Schreibweise an, sofern dieser existiert.

$$(a) a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(b) a_n = \frac{2^n}{n^2}$$

$$(c) a_n = \frac{n^2 + 4n + 1}{2n^2 + 3n + 8}$$

$$(d) a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

Aufgabe 2

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Aufgabe 2

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \quad (\text{Der Zähler wächst schneller als der Nenner.})$$

Aufgabe 2

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \quad (\text{Der Zähler wächst schneller als der Nenner.})$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{2n^2 + 3n + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 4n + 1)/n^2}{(2n^2 + 3n + 8)/n^2}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/n + 1/n^2}{2 + 3/n + 8/n^2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \quad (\text{Der Zähler wächst schneller als der Nenner.})$$

$$\begin{aligned}(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{2n^2 + 3n + 8} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 4n + 1)/n^2}{(2n^2 + 3n + 8)/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/n + 1/n^2}{2 + 3/n + 8/n^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Untersuche ob die angegebene Folge konvergent, uneigentlich konvergent oder divergent ist und gib den Grenzwert in der Limes-Schreibweise an, sofern dieser existiert.

$$(a) a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$(b) a_n = \sqrt[n]{417}$$

$$(c) a_n = \frac{3^{n+1} + 1}{3^n}$$

$$(d) a_n = \sin(n)$$

Aufgabe 3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

Aufgabe 3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{417} = \lim_{n \rightarrow \infty} 417^{\frac{1}{n}} = 417^0 = 1$$

Aufgabe 3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{417} = \lim_{n \rightarrow \infty} 417^{\frac{1}{n}} = 417^0 = 1$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3^1 + 1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{3^n}\right) = 3$$

Aufgabe 3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{417} = \lim_{n \rightarrow \infty} 417^{\frac{1}{n}} = 417^0 = 1$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3^1 + 1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{3^n}\right) = 3$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n) \quad \text{existiert nicht}$$

Aufgabe 4

Gib den (uneigentlichen) Grenzwert der Funktion an, sofern dieser existiert.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5}$$

Aufgabe 4

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$

Aufgabe 4

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0$$

Aufgabe 4

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{8}$$

Aufgabe 4

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{8}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5} = \infty$$

Aufgabe 5

Gib den (uneigentlichen) Grenzwert der Funktion an, sofern dieser existiert.

(a) $\lim_{x \rightarrow -5} (x^2 + x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

Aufgabe 5

$$(a) \lim_{x \rightarrow -5} (x^2 + x) = (-5)^2 + (-5) = 25 - 5 = 20$$

Aufgabe 5

$$(a) \lim_{x \rightarrow -5} (x^2 + x) = (-5)^2 + (-5) = 25 - 5 = 20$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x} = 0 \quad (\text{Der Nenner wächst schneller als der Zähler.})$$

Aufgabe 5

$$(a) \lim_{x \rightarrow -5} (x^2 + x) = (-5)^2 + (-5) = 25 - 5 = 20$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x} = 0 \quad (\text{Der Nenner wächst schneller als der Zähler.})$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

Aufgabe 5

$$(a) \lim_{x \rightarrow -5} (x^2 + x) = (-5)^2 + (-5) = 25 - 5 = 20$$

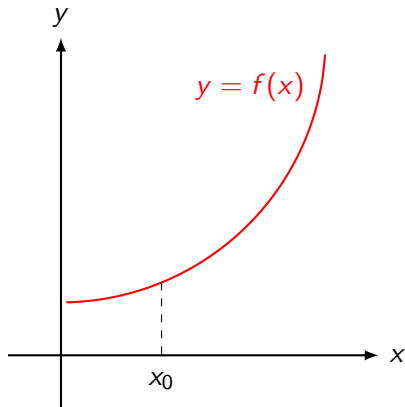
$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x} = 0 \quad (\text{Der Nenner wächst schneller als der Zähler.})$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

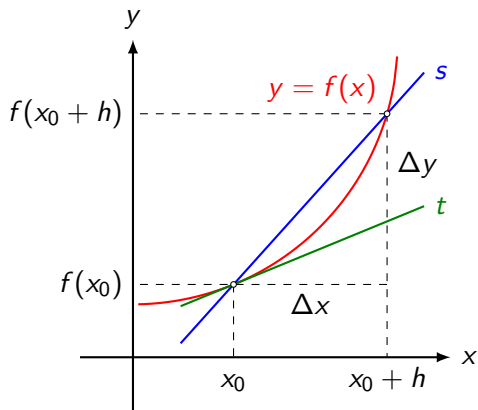
$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2$$

Aufgabe 6

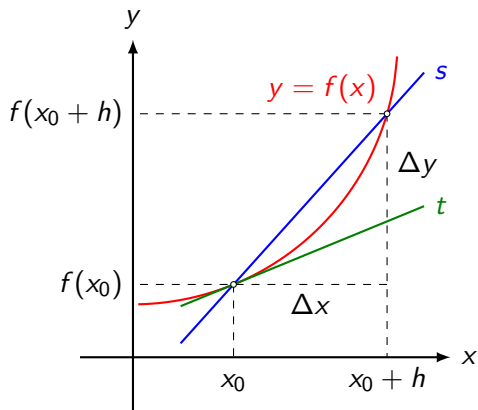
Leite die Definition des Differenzialquotienten einer Funktion f an einer Stelle x_0 für die unten gegebene Disposition her. Verwende die üblichen Bezeichnungen.



Aufgabe 6

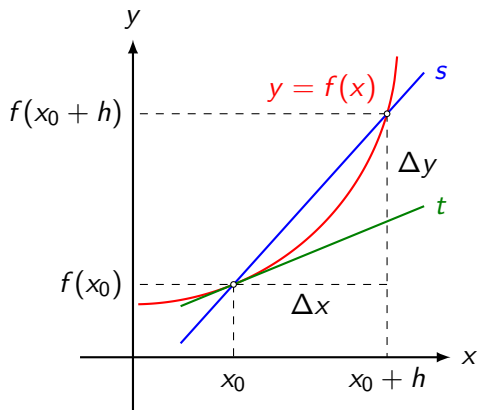


Aufgabe 6



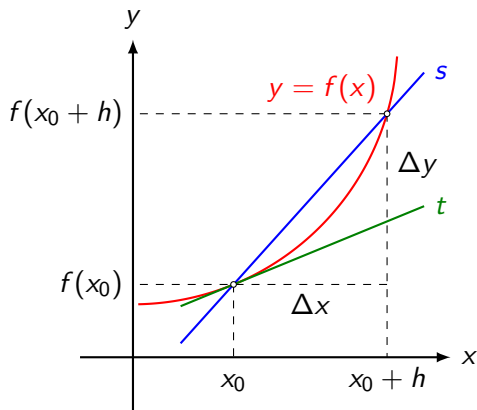
$$f'(x) =$$

Aufgabe 6



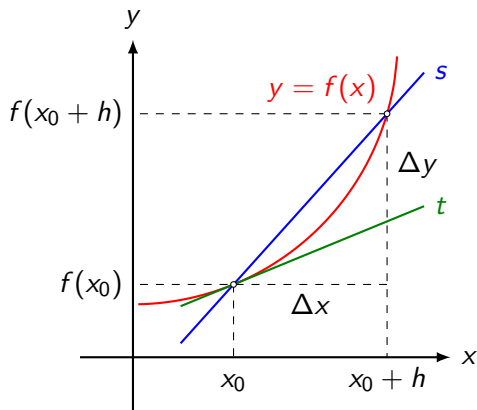
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

Aufgabe 6



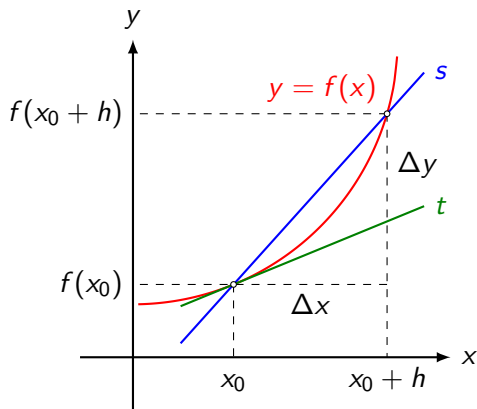
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Aufgabe 6



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{Differenzialquotient})$$

Aufgabe 6



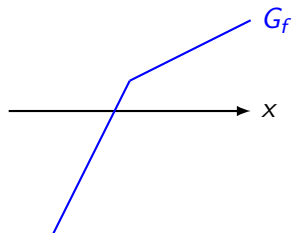
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{Differenzialquotient})$$

Geometrische Deutung: Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Aufgabe 7

Gegeben: Graph G_f einer Funktion f

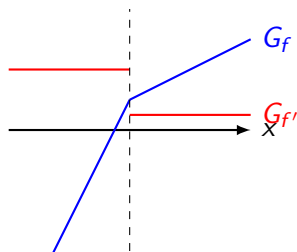
Gesucht: Graph der Ableitungsfunktion von f (qualitativ korrekt)



Aufgabe 7

Gegeben: Graph G_f einer Funktion f

Gesucht: Graph der Ableitungsfunktion von f (qualitativ korrekt)

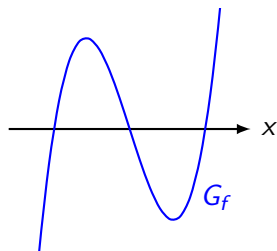


Die Funktion ist an der Stelle mit dem „Knick“ nicht differenzierbar.

Aufgabe 8

Gegeben: Graph G_f einer Funktion f

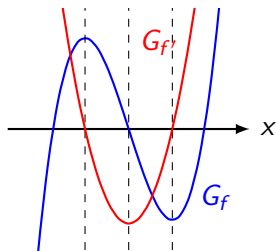
Gesucht: Graph der Ableitungsfunktion von f (qualitativ korrekt)



Aufgabe 8

Gegeben: Graph G_f einer Funktion f

Gesucht: Graph der Ableitungsfunktion von f (qualitativ korrekt)



Aufgabe 9

Leite die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sqrt{x}$ formal mit dem Differenzialquotienten her.

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \text{ erweitern mit 3. binomische Formel}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \text{ erweitern mit 3. binomische Formel}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \text{ erweitern mit 3. binomische Formel}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad \text{erweitern mit 3. binomische Formel}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad \text{erweitern mit 3. binomische Formel}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad \text{erweitern mit 3. binomische Formel}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

Aufgabe 9

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad \text{erweitern mit 3. binomische Formel} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Leite die Ableitungsfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ formal mit dem Differenzialquotienten her.

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right)$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right)$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

Aufgabe 10

Gegeben: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{gleichnamig machen}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 11

Leite die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^3$ formal mit dem Differenzialquotienten her.

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2)\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2\end{aligned}$$

Aufgabe 12

Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion f .

(a) $f(x) = x^{12}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$

Aufgabe 12

(a) $f(x) = x^{12}$

$$f'(x) = 12x^{11}$$

Aufgabe 12

(a) $f(x) = x^{12}$

$$f'(x) = 12x^{11}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Aufgabe 12

(a) $f(x) = x^{12}$

$$f'(x) = 12x^{11}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 12

(a) $f(x) = x^{12}$

$$f'(x) = 12x^{11}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

Aufgabe 13

Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion f .

(a) $f(x) = (x + 3)(x + 4)$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2}$

(c) $f(x) = (x + 2)^4$

Aufgabe 13

$$(a) f(x) = (x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

$$f'(x) = 2x + 7$$

Aufgabe 13

$$(a) f(x) = (x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

$$f'(x) = 2x + 7$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 1 - 2x^{-1} + 3x^{-2}$$

$$f'(x) = 2x^{-2} - 6x^{-3} = \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

Aufgabe 13

$$(a) f(x) = (x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

$$f'(x) = 2x + 7$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 1 - 2x^{-1} + 3x^{-2}$$

$$f'(x) = 2x^{-2} - 6x^{-3} = \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

$$(c) f(x) = (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4x + 4$$

Aufgabe 14

Bestimme die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$

(b) $f(x) = \sqrt{4x}$; $x_0 = 9$

(c) $f(x) = \frac{1}{4x^4}$; $x_0 = 3$

(d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$; $x_0 = -1$

Aufgabe 14

Bestimme die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3 \cdot 4 = 12$$

Aufgabe 14

Bestimme die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3 \cdot 4 = 12$$

(b) $f(x) = \sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$; $x_0 = 9$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(9) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 14

Bestimme die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

(a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3 \cdot 4 = 12$$

(b) $f(x) = \sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$; $x_0 = 9$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(9) = \frac{1}{3}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{4x^4} = \frac{1}{4}x^{-4}$; $x_0 = 3$

$$f'(x) = -x^{-5} = -\frac{1}{x^5} \quad \Rightarrow \quad f'(3) = -\frac{1}{3^5} = -\frac{1}{243}$$

Aufgabe 14

Bestimme die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .

(a) $f(x) = x^3; x_0 = -2$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3 \cdot 4 = 12$$

(b) $f(x) = \sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}; x_0 = 9$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(9) = \frac{1}{3}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{4x^4} = \frac{1}{4}x^{-4}; x_0 = 3$

$$f'(x) = -x^{-5} = -\frac{1}{x^5} \quad \Rightarrow \quad f'(3) = -\frac{1}{3^5} = -\frac{1}{243}$$

(d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5; x_0 = -1$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) = 0$$

Aufgabe 15

An welchen Stellen hat die Funktion mit der Gleichung
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$ eine Tangente mit der Steigung $m = 1$?

Aufgabe 15

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = x^2 - x - 5$$

Aufgabe 15

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = x^2 - x - 5$$

$$f'(x) = 1$$

$$x^2 - x - 5 = 1$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3$$

Aufgabe 16

Berechne die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 - 5x + 3$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 16

$$f(x) = x^2 - 5x + 3; x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(2) = -3$$

Aufgabe 16

$$f(x) = x^2 - 5x + 3; x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = -3$$

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow m = f'(2) = -1$$

Aufgabe 16

$$f(x) = x^2 - 5x + 3; x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = -3$$

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow m = f'(2) = -1$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q$$

$$-3 = -1 \cdot 2 + q$$

$$q = -3 + 2 = -1$$

Aufgabe 16

$$f(x) = x^2 - 5x + 3; x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = -3$$

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow m = f'(2) = -1$$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q$$

$$-3 = -1 \cdot 2 + q$$

$$q = -3 + 2 = -1$$

$$t: y = -x - 1$$

Aufgabe 17

Berechne die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 17

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(4) = 2$$

Aufgabe 17

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = f(4) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m_t = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_n = -4$$

Aufgabe 17

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = f(4) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m_t = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_n = -4$$

$$y_0 = m_n \cdot x_0 + q$$

$$2 = -4 \cdot 4 + q$$

$$q = 2 + 16 = 18$$

Aufgabe 17

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(4) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m_t = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad m_n = -4$$

$$y_0 = m_n \cdot x_0 + q$$

$$2 = -4 \cdot 4 + q$$

$$q = 2 + 16 = 18$$

$$n: y = -4x + 18$$

Aufgabe 18

Bestimme den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel der Graphen der Funktionen $f: y = x^2 + 2x$ und $g: y = x^2 + x + 1$.

Aufgabe 18

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Aufgabe 18

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Schnittpunkt: $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 2x = x^2 + x + 1$$

$$x_S = 1$$

$$y_S = f(x_S) = f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad S(1, 3)$$

Aufgabe 18

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Schnittpunkt: $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 2x = x^2 + x + 1$$

$$x_S = 1$$

$$y_S = f(x_S) = f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad S(1, 3)$$

Schnittwinkel: $f'(x) = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_f = f'(1) = 4$

$$g'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad m_g = g'(1) = 3$$

Aufgabe 18

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Schnittpunkt: $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 2x = x^2 + x + 1$$

$$x_S = 1$$

$$y_S = f(x_S) = f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad S(1, 3)$$

Schnittwinkel: $f'(x) = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_f = f'(1) = 4$

$$g'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad m_g = g'(1) = 3$$

$$\varphi = \arctan \left| \frac{m_f - m_g}{1 + m_f \cdot m_g} \right| = \arctan \left| \frac{4 - 3}{1 + 12} \right| = \arctan \frac{1}{13} \approx 4.4^\circ$$

Aufgabe 19

Eine Polynomfunktion 2. Grades hat den Ordinatenabschnitt $y = 3$ und berührt die x -Achse an der Stelle $x = 2$. Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 19

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Aufgabe 19

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad c \stackrel{(1)}{=} 3$$

Aufgabe 19

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad c \stackrel{(1)}{=} 3$$

berührt x-Achse an der Stelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(2)}{=} 0$$

Aufgabe 19

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad c \stackrel{(1)}{=} 3$$

berührt x-Achse an der Stelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(2)}{=} 0$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 2$:

$$f'(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + b \stackrel{(3)}{=} 0$$

Aufgabe 19

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad c \stackrel{(1)}{=} 3$$

berührt x-Achse an der Stelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(2)}{=} 0$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 2$:

$$f'(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + b \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$(2) - (3): b + c \stackrel{(4)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 19

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Ordinatenabschnitt:

$$f(0) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad c \stackrel{(1)}{=} 3$$

berührt x-Achse an der Stelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(2)}{=} 0$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 2$:

$$f'(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + b \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$(2) - (3): b + c \stackrel{(4)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

Aufgabe 20

Eine Polynomfunktion 2. Grades hat im Punkt $P(1, 3)$ eine horizontale Tangente und die Nullstelle $x = 2$. Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f :

$$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \stackrel{(1)}{=} 3$$

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f :

$$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \stackrel{(1)}{=} 3$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 2a + b \stackrel{(2)}{=} 0$$

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f :

$$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \stackrel{(1)}{=} 3$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 2a + b \stackrel{(2)}{=} 0$$

Nullstelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(3)}{=} 0$$

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f :

$$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \stackrel{(1)}{=} 3$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 2a + b \stackrel{(2)}{=} 0$$

Nullstelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$(3) - 2 \cdot (2): c = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad a + b \stackrel{(4)}{=} 3$$

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f :

$$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \stackrel{(1)}{=} 3$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 2a + b \stackrel{(2)}{=} 0$$

Nullstelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$(3) - 2 \cdot (2): c = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad a + b \stackrel{(4)}{=} 3$$

$$(2) - (4): a = -3 \quad \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \quad b = 6$$

Aufgabe 20

$$\text{Ansatz: } f(x) = ax^2 + bx + c = y$$

$$f'(x) = 2ax + b = m$$

Punkt $P(1, 3)$ liegt auf dem Graphen von f :

$$f(1) = 3 = y \quad \Rightarrow \quad a + b + c \stackrel{(1)}{=} 3$$

horizontale Tangente an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 0 = y \quad \Rightarrow \quad 2a + b \stackrel{(2)}{=} 0$$

Nullstelle $x = 2$:

$$f(2) = 0 = m \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b + c \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$(3) - 2 \cdot (2): c = 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad a + b \stackrel{(4)}{=} 3$$

$$(2) - (4): a = -3 \quad \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \quad b = 6$$

$$f(x) = -3x^2 + 3x$$

Aufgabe 21

Faktorisiere die Polynomfunktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ mit dem Hornerschema. Alle Nullstellen sind ganzzahlig und liegen im Intervall $[-5, 5]$.

Aufgabe 21

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$$

Aufgabe 21

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$$

x	a_4	-2	-7	20	-12
1	1	-1	-8	12	0
1	1	0	-8	4	
2	1	1	-6	0	
2	1	3	0		
-3	1	0			

Aufgabe 21

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$$

x	a_4	-2	-7	20	-12
1	1	-1	-8	12	0
1	1	0	-8	4	
2	1	1	-6	0	
2	1	3	0		
-3	1	0			

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x + 3)$$