Skalarprodukt

Definition: Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist das Produkt aus den Beträgen der Vektoren und dem Kosinus des Winkels, der die Vektoren einschliessen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

Bsp: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$

$\rightarrow 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45°$

$= 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{3}}$

gut, da wichtig; oft gebraucht

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{array}}$$

$\rightarrow \cos 90°$

Skalarprodukt in Komponentenform

$\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = |\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_1}| \cdot \cos(0°) = 1$

$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = |\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_2}| \cdot \cos(90°) = 0$

Herleitung wird nicht verlangt. Wichtig ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2)$$

ist analog ~~auf~~ für Vektoren mit 2, 4, 5, 6, ... Komponenten definiert

Kombiniert man (1) & (2), erhält man

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Zwischenwinkel-formel $\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

./.

Anwendungen des Skalarprodukts:

- Zwischenwinkelberechnung (siehe oben)
- Dokumentdistanz:

$d_1 =$ "the cat" $\quad d_2 =$ "the dog"

Wort	d_1	d_2
the	1	1
cat	1	0
dog	0	1

beliebige Reihenfolge

$$\text{dist}(d_1, d_2) = \sphericalangle(d_1, d_2)$$

$$= \arccos \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+1^2}}$$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2}$$

$$= 60°$$

- Testen, ob 2 Vektoren senkrecht sind: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- "Alternative" Berechnung des Betrags eines Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\underset{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$