TAYLORREIHE

Das Taylorpolynom $T_n f(x, x_0)$ ist eine Polynomfunktion vom Grad n, die eine n-Mal differenzierbare Funktion f in der Nähe der stelle x_0 approximiert (annähert).

$$T_n f(x,x_0) = \frac{f(x_0)}{0!} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_{a_1}(x-x_0)^1 + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{a_2}(x-x_0)^2 + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{a_n}(x-x_0)^n$$

Bsp. $T_2 f(x, x_0) = \,?$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x_0 = 1$

Ableitungen:

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow f(1) = 1^{-1} = 1$

$f'(x) = -x^{-2} \longrightarrow f'(1) = -1^{-2} = -1$

$f''(x) = 2x^{-3} \longrightarrow f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2$

$$T_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{-1}{\underbrace{1!}_{1}}(x-1) + \frac{2}{\underbrace{2!}_{2}}(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{-1}{1}(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2$$

$$= 1 - 1(x-1) + 1(x-1)^2$$

$$= 1 - x + 1 + 1(x-1)(x-1)$$

$$= 1 - x + 1 + 1(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 1 - x + 1 + x^2 - 2x + 1$$

$$T_2(x) = x^2 - 3x + 3$$

Anwendungen:
- Lokale Näherungsformeln für "komplizierte" Funktionen
- Lokale Interpretation des Kurvenverlaufs einer Funktion (→ Kurvendiskussion)
- Lösen transzendenter* Gleichungen
  (* algebraisch nicht lösbar)