8. Asymptotisches Verhalten

Wie verhält sich eine Funktion f für betragsmässig grosse x?

- ~~Die asymtotische Theorie geht davon aus, dass es im Prinzip möglich ist, weiterhin zusätzliche Daten zu sammeln, so dass die Stichprobengrösse unendlich wächst, d. h. $x \to \infty$. Unter der Annahme können viele Ergebnisse erhalten werden, die für Proben endlicher Grösse nicht verfügbar sind.~~ andere Teilgebiet der Math.

- Beispiele (Polynomfunktionen)$_\infty$

① $f(x) = x^4 - 2x^2$

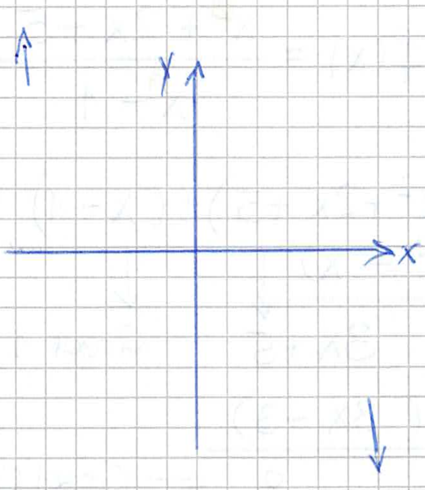
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^4 = \infty$$

② $f(x) = 3x^2 - x^3$

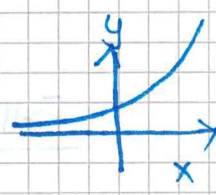
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

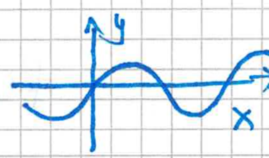


Andere Beispiele:

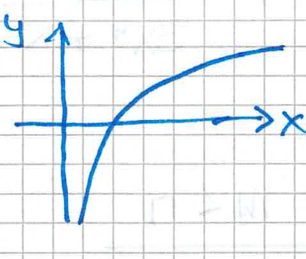
$f(x) = e^x \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



$f(x) = \sin(x) \Rightarrow \lim\limits_{|x| \to \infty} \sin(x)$ existiert nicht



$f(x) = \ln(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$



./.

Eine erweiterte Untersuchung ist bei gebrochen rationalen Funktionen, d.h. bei Funktionen vom Typ

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

möglich.

Fall 1: $m > n$ Polynomdivision

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^1 - 1} \quad \begin{matrix} (m=2) \\ (n=1) \end{matrix}$$

$$(x^2+2x+5) : (x-1) = \underbrace{x + 3 + \frac{8}{x-1}}$$

– strebt gegen Null, wenn $|x| \to \infty$

$$\begin{array}{l} -(x^2 - x) \\ \hline \quad 3x + 5 \\ -(3x - 3) \\ \hline \quad 8 \end{array}$$

Grad 1 $\longrightarrow$ $x+3$ wenn $|x| \to \infty$

$\hookrightarrow$ schiefe Asymptote

8 $\leftarrow$ Grad 0; also Rest

Fall 2: $m = n$ Es genügt, den Quotienten der Leitkoeffizienten $\frac{a_m}{a_n}$ zu betrachten

$$f(x) = \frac{2x^4 + 1}{3x^4 + x} = \frac{\cancel{x^4}(2 + 1/x^4)}{\cancel{x^4}(3 + 1/x^3)} \longrightarrow \frac{2}{3} \text{ wenn } |x| \to \infty$$

$y = \frac{2}{3}$ horizontale Asympt.

Fall 3: $m < n$

$y = 0$ horiz. Asympt.

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x^3 + 2} = \frac{x^2(3 + 1/x + 1/x^2)}{x^3(1 + 2/x^3)} = \frac{3 + 1/x + 1/x^2}{x(1 + 2/x^3)} \to 0 \text{ wenn } |x| \to \infty$$