7. Symmetrieeigenschaften von Funktionen

- gerade und ungerade Funktionen

Achsensymmetrisch / Ordinatensymmetrisch

→ Der Graph G_f einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = f(x)$.
Funktionen mit dieser Eigenschaft werden gerade genannt.

Punktsymmetrisch / Ursprungssymmetrisch

→ Der Graph G_f einer Funktion f ist genau dann symmetrisch zum Ursprung, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.
Funktionen mit dieser Eigenschaft werden ungerade genannt

- formale Untersuchung der Symmetrieeigenschaft des Graphen einer Funktion

"für alle"

$f(x) = x^3$ ungerade weil: $f(-x) = (-x)^3 = \underline{\underline{-x^3}}$, $-f(x) = \underline{\underline{-x^3}}$ $\Big\}$ $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D$

$f(x) = x^2$ gerade weil: $f(-x) = -x^2 = \underline{\underline{x^2}}$, $f(x) = \underline{\underline{x^2}}$ $\Big\}$ $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D$

$f(x) = x^3 - 6x$ ungerade weil: $f(x) = x^3 - 6x$

$f(-x) = -x^3 - 6(-x) = \underline{\underline{-x^3 + 6x}}$

$-f(x) = -(x^3 - 6x) = \underline{\underline{-x^3 + 6x}}$

oder: Differenz ungerader Funktionen ist ungerade

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ gerade weil: $f(x) = \underline{\underline{x^4 - 3x^2 + 5}}$

$f(-x) = -x^4 - 3(-x)^2 + 5 = \underline{\underline{x^4 - 3x^2 + 5}}$

oder: Summe gerader Funktionen ist gerade

$f(x) = x^7 \cdot x^5 = x^{12}$ → gerade

$f(x) = x^6 \cdot x^3 = x^9$ → ungerade

"Rechenregeln":
$u + u \to u$
$g + g \to g$
$g + u \to$ keine
$u + g \to$ keine

$\frac{g}{g} \to g$
$\frac{g}{u} \to u$
$\frac{u}{g} \to u$

sollte man auswendig können (oder anhand des Graphen "herleiten")

- $f(x) = \sin(x)$: ungerade
- $f(x) = \cos(x)$: gerade
- $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$: weder gerade noch ungerade

$f(x) = x^{-1}$: ungerade

$f(x) = x^{-2}$: gerade