1. Grenzwerte von Funktionen

=> Untersuchung vom Funktionswert $f(x_n) = y_n$, wenn x_n gegen x_0 (← gegeben) strebt.

Grenzwert: eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass in seiner Umgebung alle bis auf endlich viele Glieder liegen.

Folge mit Grenzwert = „konvergent" (≠ divergent)
kein Grenzwert

$$\left[\; a = \lim_{n \to \infty} a_n \;\right]$$

Bsp. ①

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \left(\frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{x\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$$= \underline{\underline{3}} = \text{Grenzwert}$$

②

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x - 3} = \infty$$

Zahl oberhalb von 3 einsetzen z.B. 5

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty$$

Zahl unterhalb von 3 einsetzen z.B. 2

$$\frac{1}{5-3} = \frac{1}{2} = +\infty$$

$$\frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1 =$$

$$= -\infty$$

③

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{2^x} = 0$$

x^3: wächst langsamer

2^x: wächst schneller

$$\left(\text{wenn } \lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{x^3} = \infty \right.$$

Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn für jede Folge $\underbrace{x_1, x_2, x_3, \ldots}_{\in D_f}$ die gegen x_0 konvergiert, die

Folge der Werte $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, ... gegen dieselbe Zahl g konvergiert. Man schreibt dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ $\quad x_0 = 0 \notin D_f$

wähle eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ in D_f die gegen $x_0 = 0$ konvergiert

$x_1 = 0.9$, $\quad x_2 = 0.99$, $\quad x_3 = 0.999$, $\quad \longrightarrow 1^-$

$y_1 = f(x_1) = 1.9$, $\quad y_2 = f(x_2) = 1.99$ $\quad y_3 = f(x_3) = 1{,}999$ $\quad \longrightarrow 2$

oder eine andere Folge:

$x_1 = 1.1$, $\quad x_2 = 1.01$ $\quad x_3 = 1.001$ $\quad \longrightarrow 1^+$

$y_1 = f(x_1) = 2.1$ $\quad y_2 = f(x_2) = 2.01$ $\quad y_3 = f(x_3) = 2.001$ $\quad \longrightarrow 2$

Also ist $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$