Das Taylorpolynom $T_n f(x; x_0)$ ist eine Polynomfunktion vom Grad n, die eine n-Mal differenzierbare Funktion f in der Nähe der Stelle x_0 approximiert (annähert).

$$T_n f(x; x_0) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

dabei bedeuten

- $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$
- $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$
- $f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$
- $f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0)$
- ...

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- ...

- $(x-x_0)^0 = 1$
- $(x-x_0)^1 = x - x_0$
- $(x-x_0)^2 = x^2 - 2x_0x + x_0^2$
- ...

Die Schreibweise $T_n f(x; x_0)$ fasst alle nötigen Informationen zusammen:

T	wie Taylorpolynom
n	höchste vorkommende Ableitung und grösster Exponent
f	die anzunähernde Funktion
x	die Variable des Polynoms
x_0	die Entwicklungsstelle

Beispiel

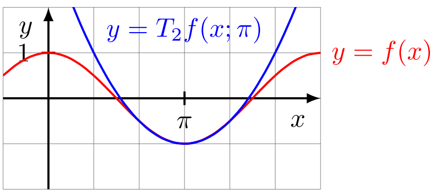
$T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \cos x$ und $x_0 = \pi$

$f(x)$ bis zur 2. Ableitung berechnen; danach $x_0 = \pi$ einsetzen:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(\pi) = \cos \pi = -1$$
$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = -\sin \pi = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f''(\pi) = -\cos \pi = 1$$

Taylorpolynom aufstellen und vereinfachen: $(*)$ sofern Ausmultiplizieren verlangt ist.

$$T_2 f(x; \pi) = \frac{-1}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{0}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2$$
$$= -1 \cdot 1 + 0 \cdot (x-\pi) + \tfrac{1}{2} \cdot (x-\pi)^2$$
$$= -1 + \tfrac{1}{2}(x-\pi)^2 \stackrel{*}{=} \tfrac{1}{2}x^2 - \pi x + \tfrac{1}{2}\pi^2 - 1$$



Übungen

(a) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x &\Rightarrow\quad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \mathrm{e}^x &\Rightarrow\quad f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \mathrm{e}^x &\Rightarrow\quad f''(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$Tf(x,0) = \frac{\mathrm{e}^0}{0!} + \frac{\mathrm{e}^0}{1!}(x-0) + \frac{\mathrm{e}^0}{2!}(x-0)^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

(b) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x \\ f'(x) &= \mathrm{e}^x \\ f''(x) &= \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tf(x,0) &= \frac{\mathrm{e}^1}{0!} + \frac{\mathrm{e}^1}{1!}(x-1) + \frac{\mathrm{e}^1}{2!}(x-1)^2 \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \tfrac{\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}x - \mathrm{e} + \tfrac{\mathrm{e}}{2}x^2 - \mathrm{e}x + \tfrac{\mathrm{e}}{2} \\ &= \tfrac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \tfrac{\mathrm{e}}{2} \end{aligned}$$

(c) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow\quad f(1) &= 1^{\frac{1}{2}} = 1 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} &\Rightarrow\quad f'(1) &= \tfrac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} &\Rightarrow\quad f''(1) &= -\tfrac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tf(x,0) &= \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}(x^2 - 2x + 1) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8} \\ &= -\tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

(d) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 4$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f(1) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(4) = \tfrac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(4) = -\tfrac{1}{4} \cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} Tf(x,0) &= \frac{f(4)}{0!} + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{4}(x-4) - \tfrac{1}{64}(x-4)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{4}x - 1 - \tfrac{1}{64}(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2 + \tfrac{1}{4}x - 1 - \tfrac{1}{64}x^2 + \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{4} \\ &= -\tfrac{1}{64}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

(e) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $x_0 = 4$

$$f(x) = 1/x = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f(4) = \tfrac{1}{4}$$

$$f'(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(4) = -4^{-2} = -\tfrac{1}{16}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(4) = 2 \cdot 4^{-3} = \tfrac{1}{32}$$

$$\begin{aligned} Tf(x,0) &= \frac{f(4)}{0!} + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}(x-4) + \tfrac{1}{64}(x-4)^2 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}x + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{64}(x^2 - 8x + 16) \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}x + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{64}x^2 - \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{1}{64}x^2 - \tfrac{3}{16}x + \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

(f) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \sin x$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (ohne Ausmultiplizieren)

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\begin{aligned} Tf(x,0) &= \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0!} + \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 + 0\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\left(x^2 - \pi x + \tfrac{\pi^2}{4}\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{\pi}{2}x + \tfrac{\pi^2}{8} \\ &= -\tfrac{\pi}{2}x^2 + \tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{\pi^2}{8} + 1 \end{aligned}$$

(g) $T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = x^4$ und $x_0 = 1$

$$f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1^4 = 1$$
$$f'(x) = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4$$
$$f''(x) = 12x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 12 \cdot 1^2 = 12$$

$$\begin{aligned} Tf(x,0) &= \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 \\ &= 1 + 4x - 4 + 6(x^2 - 2x + 1) \\ &= -3 + 4x + 6x^2 - 12x + 6 \\ &= 6x^2 - 8x + 3 \end{aligned}$$