

Das Taylorpolynom $T_n f(x; x_0)$ ist eine Polynomfunktion vom Grad n , die eine n -Mal differenzierbare Funktion f in der Nähe der Stelle x_0 approximiert (annähert).

$$T_n f(x; x_0) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} (x - x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

dabei bedeuten

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| • $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ | • $0! = 1$ | • $(x - x_0)^0 = 1$ |
| • $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$ | • $1! = 1$ | • $(x - x_0)^1 = x - x_0$ |
| • $f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$ | • $2! = 2 \cdot 1 = 2$ | • $(x - x_0)^2 = x^2 - 2x_0x + x_0^2$ |
| • $f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0)$ | • $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ | • ... |
| • ... | • ... | |

Die Schreibweise $T_n f(x; x_0)$ fasst alle nötigen Informationen zusammen:

- T wie Taylorpolynom
 n höchste vorkommende Ableitung und grösster Exponent
 f die anzunähernde Funktion
 x die Variable des Polynoms
 x_0 die Entwicklungsstelle

Beispiel

$T_2 f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \cos x$ und $x_0 = \pi$

$f(x)$ bis zur 2. Ableitung berechnen; danach $x_0 = \pi$ einsetzen:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(\pi) = \cos \pi = -1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = -\sin \pi = 0$$

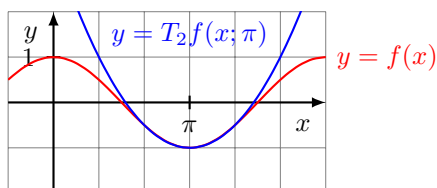
$$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f''(\pi) = -\cos \pi = 1$$

Taylorpolynom aufstellen und vereinfachen: (*) sofern Ausmultiplizieren verlangt ist.

$$T_2 f(x; \pi) = \frac{-1}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{0}{1!} (x - \pi)^1 + \frac{1}{2!} (x - \pi)^2$$

$$= -1 \cdot 1 + 0 \cdot (x - \pi) + \frac{1}{2} \cdot (x - \pi)^2$$

$$= -1 + \frac{1}{2} (x - \pi)^2 \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} x^2 - \pi x + \frac{1}{2} \pi^2 - 1$$



Übungen

(a) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$

(b) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = e^x$ und $x_0 = 1$

(c) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 1$

(d) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 4$

(e) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x_0 = 4$

(f) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = \sin x$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (ohne Ausmultiplizieren)

(g) $T_2f(x; x_0) = ?$ mit $f(x) = x^4$ und $x_0 = 1$