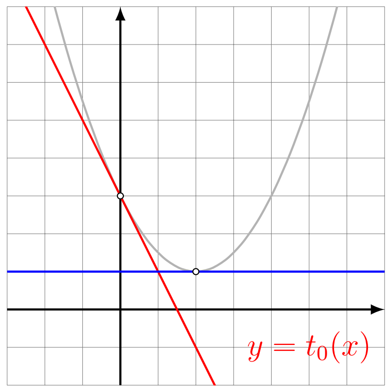
Beispiel 1

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

$f'(x) = x - 2$

$f''(x) = 1$



$T_2 f(x, 0) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 = \underbrace{3 - 2x}_{t_0(x)} + \frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned} T_2 f(x, 2) &= f(2) + f'(2)\,(x-2) + \tfrac{1}{2} f''(2)\,(x-2)^2 \\ &= 1 - 0(x-2) + \tfrac{1}{2}(x-2)^2 = \underbrace{1 - 0x}_{t_2(x)} + \tfrac{1}{2}(x-2)^2 \end{aligned}$$

$f'(2) = 0 \;\Rightarrow\; t_2$ ist horizontal

$f''(2) = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} f''(x)(x-2)^2$ nach oben offen $\;\Rightarrow\;$ TiP$(2, 1)$

Das Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 zerlegt f in eine Summe von Potenzfunktionen

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Anhand der Koeffizienten $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{1}{2!}f''(x_0)$, $\frac{1}{3!}f'''(x_0)$, … können wir erkennen, ob der Graph von f an der Stelle x_0 steigt, fällt und ob er dort einen Hoch-, Tief-, Wende- oder Sattelpunkt besitzt.

Beispiel 2

Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion f und vervollständige damit die unten vorbereitete Wertetabelle. Berechne anschliessend mit Hilfe der Wertetabelle die Taylorpolynome $T_2 f(x, 1)$, $T_2 f(x, 3)$ sowie $T_3 f(x, 2)$ und ziehe daraus Rückschlüsse auf die lokale Gestalt des Graphen von f.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$f''(x) = 6x - 12$
$f'''(x) = 6$

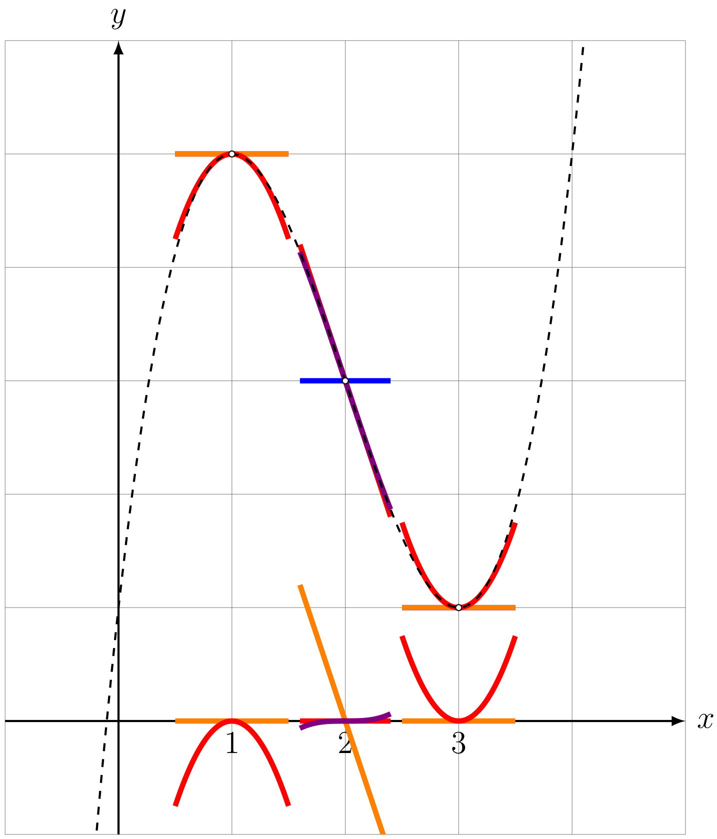
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f'''(x_0)$
1	5	0	-6	6
3	1	0	6	6
2	3	-3	0	6

$$T_3 f(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

$$T_2 f(x; 1) = 5 + 0 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1)^2$$

$$T_2 f(x; 3) = 1 + 0 \cdot (x - 3) + 3 \cdot (x - 3)^2$$

$$T_3 f(x; 2) = 3 - 3 \cdot (x - 2) + 0 \cdot (x - 2)^3 + 1 \cdot (x - 2)^3$$



Beispiel 3

Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion f und vervollständige damit die unten vorbereitete Wertetabelle. Berechne anschliessend mit Hilfe der Wertetabelle die Taylorpolynome $T_3f(x,1)$, $T_3f(x,2)$ sowie $T_3f(x,4)$ und ziehe daraus Rückschlüsse auf die lokale Gestalt des Graphen von f.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 2$
$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$
$f''(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f'''(x) = 6x - 18$

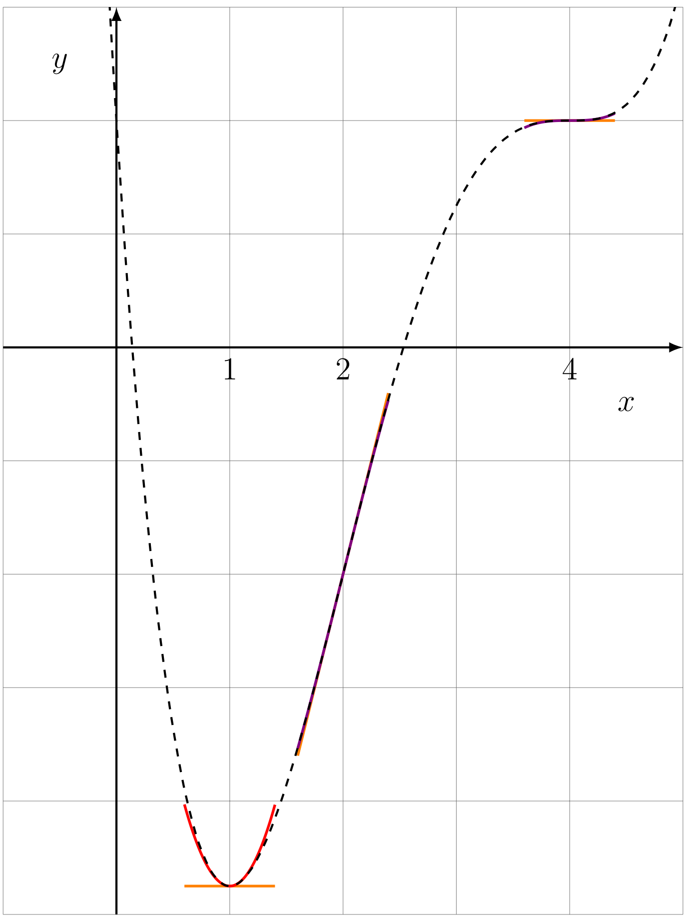
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f'''(x_0)$
1	-4.75	0	9	12
2	-2	4	0	-6
4	2	0	0	6

$$T_3f(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \tfrac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3$$

$$T_3f(x;1) = -4.75 + 0\cdot(x-1) + 9\cdot(x-1)^2 + 6\cdot(x-1)^3$$

$$T_3f(x;2) = -2 + 4\cdot(x-2) + 0\cdot(x-2)^2 - 1\cdot(x-2)^3$$

$$T_3f(x;4) = 2 + 0\cdot(x-4) + 0\cdot(x-4)^2 + 1\cdot(x-4)^3$$



Zusammenfassung

Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 n-Mal differenzierbar, so lässt sich aus $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\dots$, $f^{(n)}(x_0)$ wie folgt ein Polynom bilden:

$$T_n f(x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

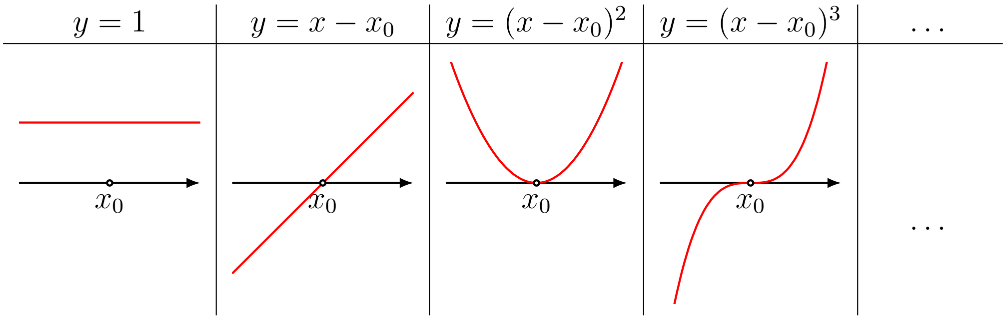
$T_n f(x;x_0)$ wird *n-tes Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle* x_0 genannt.

Im Normalfall stellt $T_n f(x;x_0)$ eine Approximation (Näherung) der Funktion f in einer geeigneten Umgebung von x_0 dar. Dabei wächst die Güte der Approximation mit zunehmendem n.

Ist die zu approximierende Funktion f selbst ein Polynom vom Grad n, so stimmen $f(x)$ und $T_n f(x;x_0)$ sogar für alle x_0 auf ihrem gesamten Definitionsbereich überein.

Die Basisfunktionen

Haben wir das Taylorpolynom einer Funktion f bestimmt, können wir f als Summe von Potenzfunktionen darstellen:



Die Tangentengleichung

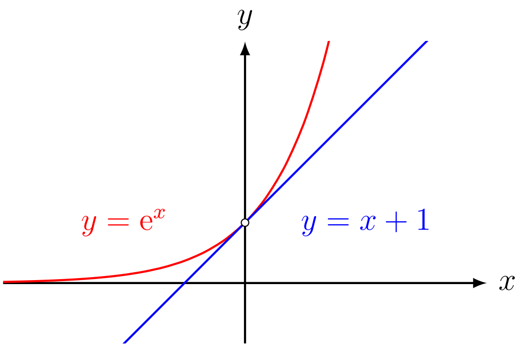
Merke: $T_1 f(x;x_0)$ ist die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0.

Beispiel 1: Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = \mathrm{e}^x$ für $x_0 = 0$

$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

$T_1 f(x;0) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + 1 \cdot (x-0) = x + 1$



Hochpunkte

Merke: Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Hochpunkt.*

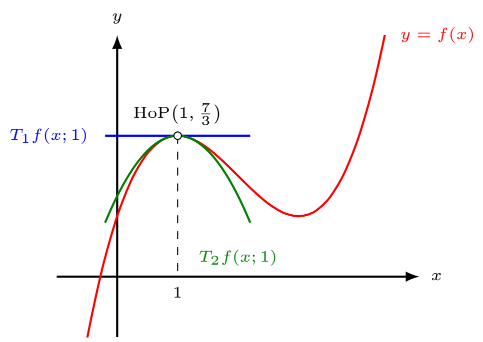
Beispiel 2: Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ bei $x_0 = 1$.

$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1 - 4 + 3 = 0$

$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 2 - 4 = -2$

$T_2 f(x; 1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = \frac{7}{3} + 0(x-1) - 1(x-1)^2$



Tiefpunkte

Merke: Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Tiefpunkt.*

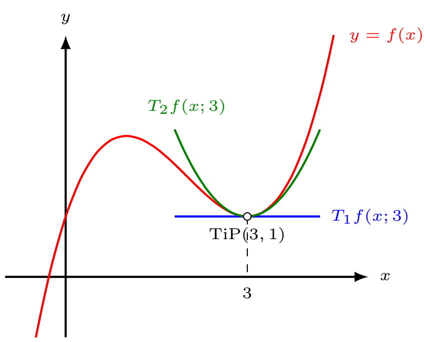
Beispiel 3 Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ bei $x_0 = 3$.

$f(3) = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 9 - 12 + 3 = 0$

$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 6 - 4 = 2$

$T_2 f(x; 3) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{1}{2}f''(3)(x-3)^2 = 1 + 0(x-3) + 1(x-3)^2$



Wendepunkte

Merke: Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*.

Beispiel 4: Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ bei $x_0 = 2$.

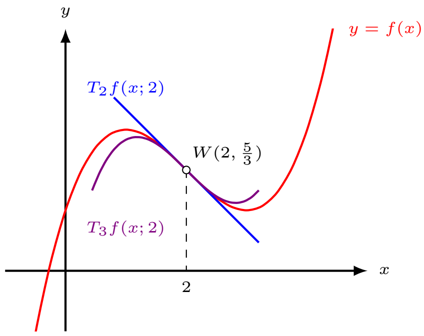
$f(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = \frac{5}{3}$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4 - 8 + 3 = -1$

$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(2) = 4 - 4 = 0$

$f'''(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f'''(2) = 2$

$T_3 f(x; 2) = \cdots = \frac{5}{3} - 1(x-2) + 0(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3$



Terrassenpunkte (Sattelpunkte)

Merke: Gilt $f'(x) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Terrassenpunkt* (*Sattelpunkt*).

Beispiel 5: Untersuche $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$ bei $x = 1$.

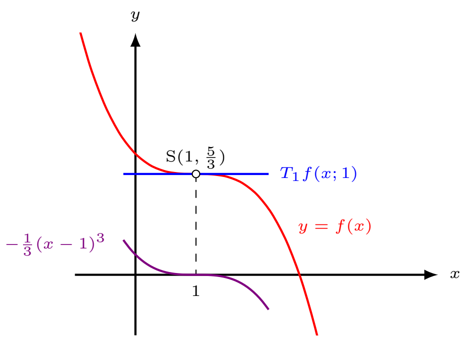
$f(1) = -\frac{1}{3} + 1 - 1 + 2 = \frac{5}{3}$

$f'(x) = -x^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -1 + 2 - 1 = 0$

$f''(x) = -2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -2 + 2 = 0$

$f'''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = -2$

$T_3 f(x; 1) = \cdots = \frac{5}{3} + 0(x-1) + 0(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3$



Vorgehen bei der Kurvendiskussion einer Funktion f

1. **Definitionsbereich:** $D_f = \{x\colon f(x) \text{ ist definiert}\}$

    - $f(x) = x^3 + x - 2 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}$
    - $f(x) = \sqrt{x-3} \quad \Rightarrow \quad D = [3, \infty)$
    - $f(x) = 1/(x^2 + 2x - 3) \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$

2. **Asymptotisches Verhalten:**

    - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$
    - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$

    Bei gebrochen rationalen Funktionen sowie bei Exponential- und Logarithmusfunktionen sind die Gleichungen allfälliger Asymptoten anzugeben. Dies sind Gleichungen von Geraden und Kurven, die das Verhalten von f für grosse $|x|$ oder in der Nähe von Definitionslücken beschreiben.

3. **Symmetrie:**

    - $f(-x) = f(x)\ \forall\, x \in D$: G_f symmetrisch zur x-Achse
    - $f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in D$: G_f symmetrisch zum Ursprung

4. **Ordinatenabschnitt:** $y_0 = f(0)$
5. **Nullstellen:** $N = \{x \in D\colon f(x) = 0\}$
6. **Ableitungen:** Bestimme $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.
7. **Hoch- und Tiefpunkte (Extrempunkte):**
    $H = \{(x, f(x))\colon f'(x) = 0 \,\wedge\, f''(x) < 0\}$ (Hochpunkte)
    $T = \{(x, f(x))\colon f'(x) = 0 \,\wedge\, f''(x) > 0\}$ (Tiefpunkte)
8. **Wende- bzw. Sattelpunkte:**
    $W = \{(x, f(x))\colon f''(x) = 0 \,\wedge\, f'''(x) \neq 0\}$ (Wendepunkte)
    $S = \{(x, f(x))\colon f'(x) = f''(x) = 0 \,\wedge\, f'''(x) \neq 0\}$ (Sattelpunkte)
    Sattelpunkte sind Wendepunkte mit einer horizontalen Wendetangente.
9. **Graph:** Skizziere $y = f(x)$ mit Hilfe von 1–8.

Musteraufgabe

Untersuche die gebrochen rationale Funktion mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotischen Verhalten, Ordinatenabschnitt, Nullstellen, Ableitungen, Extrem- und Wendepunkte, Graph