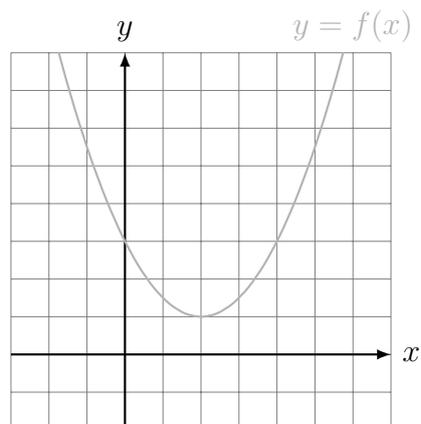


Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

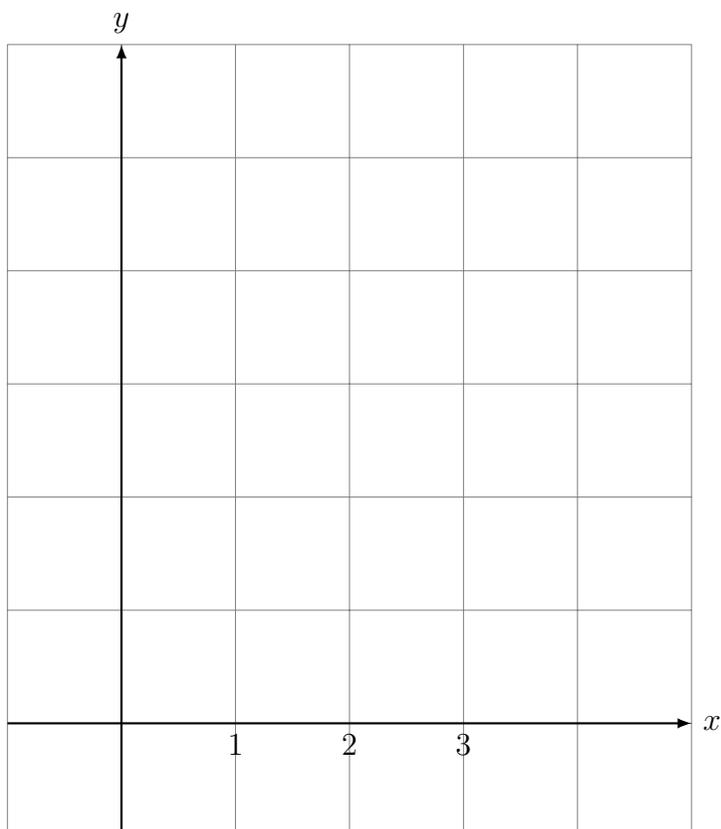


Beispiel 2

Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion f und vervollständige damit die unten vorbereitete Wertetabelle. Berechne anschliessend mit Hilfe der Wertetabelle die Taylorpolynome $T_2f(x, 1)$, $T_2f(x, 3)$ sowie $T_3f(x, 2)$ und ziehe daraus Rückschlüsse auf die lokale Gestalt des Graphen von f .

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f'''(x_0)$
1				
3				
2				

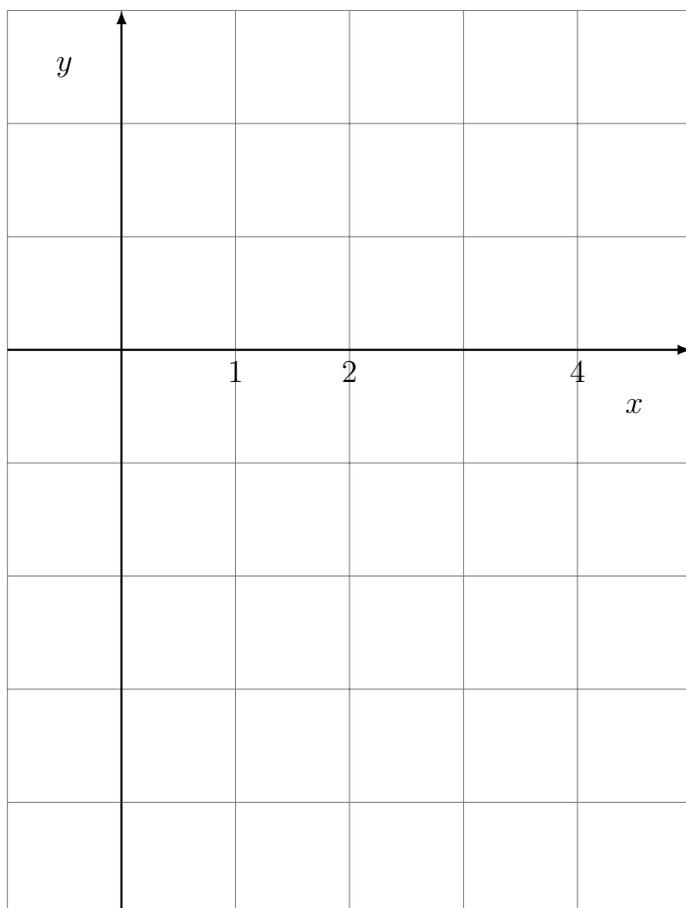


Beispiel 3

Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion f und vervollständige damit die unten vorbereitete Wertetabelle. Berechne anschliessend mit Hilfe der Wertetabelle die Taylorpolynome $T_3f(x, 1)$, $T_3f(x, 2)$ sowie $T_3f(x, 4)$ und ziehe daraus Rückschlüsse auf die lokale Gestalt des Graphen von f .

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 2$$

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f'''(x_0)$
1				
2				
4				



Zusammenfassung

Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 n -Mal differenzierbar, so lässt sich aus $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, \dots , $f^{(n)}(x_0)$ wie folgt ein Polynom bilden:

$$T_n f(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

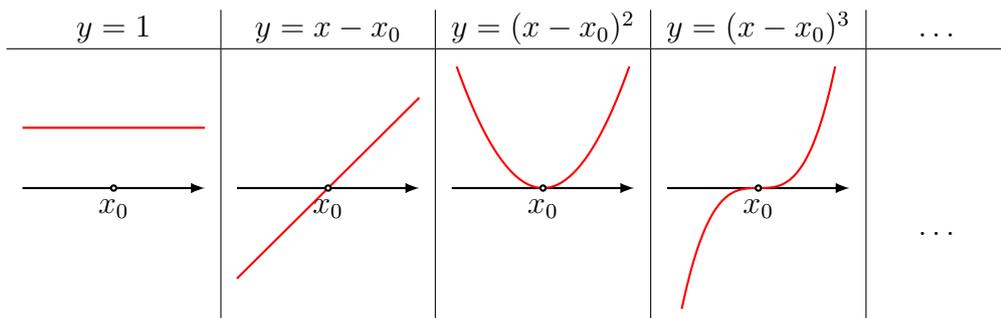
$T_n f(x; x_0)$ wird *n-tes Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle x_0* genannt.

Im Normalfall stellt $T_n f(x; x_0)$ eine Approximation (Näherung) der Funktion f in einer geeigneten Umgebung von x_0 dar. Dabei wächst die Güte der Approximation mit zunehmendem n .

Ist die zu approximierende Funktion f selbst ein Polynom vom Grad n , so stimmen $f(x)$ und $T_n f(x; x_0)$ sogar für alle x_0 auf ihrem gesamten Definitionsbereich überein.

Die Basisfunktionen

Haben wir das Taylorpolynom einer Funktion f bestimmt, können wir f als Summe von Potenzfunktionen darstellen:



Die Tangentengleichung

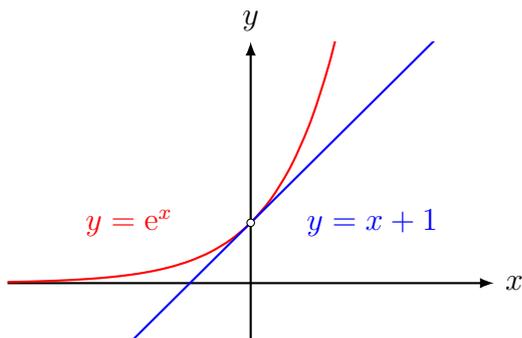
Merke: $T_1 f(x; x_0)$ ist die Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0 .

Beispiel 1: Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ für $x_0 = 0$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$T_1 f(x; 0) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = x + 1$$



Hochpunkte

Merke: Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Hochpunkt*.

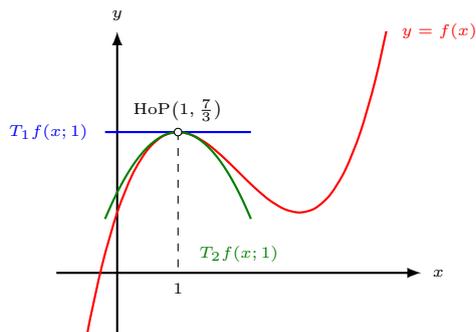
Beispiel 2: Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ bei $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 2 - 4 = -2$$

$$T_2f(x; 1) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2 = \frac{7}{3} + 0(x - 1) - 1(x - 1)^2$$



Tiefpunkte

Merke: Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Tiefpunkt*.

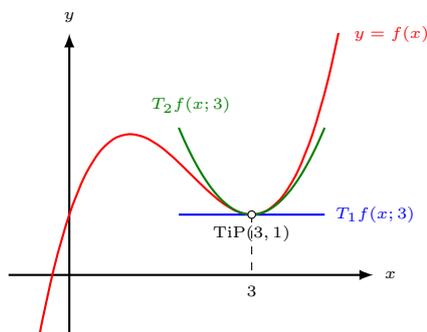
Beispiel 3 Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ bei $x_0 = 3$.

$$f(3) = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 6 - 4 = 2$$

$$T_2f(x; 3) = f(3) + f'(3)(x - 3) + \frac{1}{2}f''(3)(x - 3)^2 = 1 + 0(x - 3) + 1(x - 3)^2$$



Wendepunkte

Merke: Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt*.

Beispiel 4: Untersuche $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ bei $x_0 = 2$.

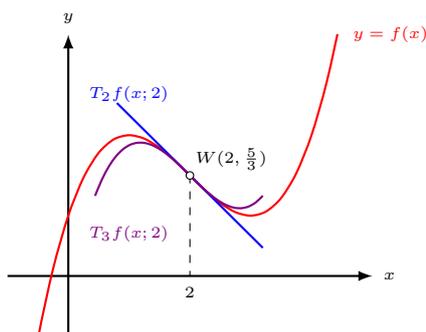
$$f(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = \frac{5}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f''(2) = 4 - 4 = 0$$

$$f'''(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f'''(2) = 2$$

$$T_3 f(x; 2) = \dots = \frac{5}{3} - 1(x - 2) + 0(x - 2)^2 + \frac{1}{3}(x - 2)^3$$



Terrassenpunkte (Sattelpunkte)

Merke: Gilt $f'(x) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen *Terrassenpunkt (Sattelpunkt)*.

Beispiel 5: Untersuche $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$ bei $x = 1$.

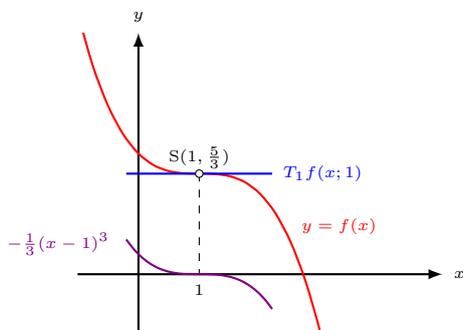
$$f(1) = -\frac{1}{3} + 1 - 1 + 2 = \frac{5}{3}$$

$$f'(x) = -x^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

$$f''(x) = -2x + 2 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -2 + 2 = 0$$

$$f'''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = -2$$

$$T_3 f(x; 1) = \dots = \frac{5}{3} + 0(x - 1) + 0(x - 1)^2 - \frac{1}{3}(x - 1)^3$$



Vorgehen bei der Kurvendiskussion einer Funktion f

1. **Definitionsbereich:** $D_f = \{x: f(x) \text{ ist definiert}\}$

- $f(x) = x^3 + x - 2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow D = [3, \infty)$
- $f(x) = 1/(x^2 + 2x - 3) \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$

2. **Asymptotisches Verhalten:**

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

Bei gebrochen rationalen Funktionen sowie bei Exponential- und Logarithmusfunktionen sind die Gleichungen allfälliger Asymptoten anzugeben. Dies sind Gleichungen von Geraden und Kurven, die das Verhalten von f für grosse $|x|$ oder in der Nähe von Definitionslücken beschreiben.

3. **Symmetrie:**

- $f(-x) = f(x) \forall x \in D$: G_f symmetrisch zur x -Achse
- $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$: G_f symmetrisch zum Ursprung

4. **Ordinatenabschnitt:** $y_0 = f(0)$

5. **Nullstellen:** $N = \{x \in D: f(x) = 0\}$

6. **Ableitungen:** Bestimme $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.

7. **Hoch- und Tiefpunkte (Extrempunkte):**

$$H = \{(x, f(x)): f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0\} \text{ (Hochpunkte)}$$

$$T = \{(x, f(x)): f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0\} \text{ (Tiefpunkte)}$$

8. **Wende- bzw. Sattelpunkte:**

$$W = \{(x, f(x)): f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0\} \text{ (Wendepunkte)}$$

$$S = \{(x, f(x)): f'(x) = f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0\} \text{ (Sattelpunkte)}$$

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit einer horizontalen Wendetangente.

9. **Graph:** Skizziere $y = f(x)$ mit Hilfe von 1–8.

Musteraufgabe

Untersuche die gebrochen rationale Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotischen Verhalten, Ordinatenabschnitt, Nullstellen, Ableitungen, Extrem- und Wendepunkte, Graph

