Aufgabe 3.1

(a) $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$
$f'(x) = 8x - 7$

(b) $f(x) = 13x^4 + 9x^3 - 15$
$f'(x) = 52x^3 + 27x^2$

(c) $f(x) = 4.5x^8 + 16x^5 - 23$
$f'(x) = 36x^7 + 80x^4$

(d) $f(x) = x^4(2x-3)^2 = x^4(4x^2 - 12x + 9) = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4$
$f'(x) = 24x^5 - 60x^4 + 36x^3$

(e) $f(x) = x^2(x-1)^3 = \cdots = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$
$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x$

(f) $f(x) = (x+3)(3x-2)^2 = \cdots = 9x^3 + 15x^2 - 32x + 12$
$f'(x) = 27x^2 + 30x - 32$

Aufgabe 3.2

(a) $f(x) = 3x^3 - 8x + 10$; $P(1, y_P)$

$y_P = f(1) = 3 - 8 + 10 = 5$

$f'(x) = 9x^2 - 8$

$m = f'(1) = 9 - 8 = 1$

$y_P = m \cdot x_P + q$
$5 = 1 \cdot 1 + q$
$q = 4$

Tangentengleichung t: $y = x + 4$

(b) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 14x - 7$; $P(1, y_P)$

$y_P = f(1) = 3 - 8 + 14 - 7 = 2$

$f'(x) = 15x^4 - 24x^2 + 14$

$m = f'(1) = 15 - 24 + 14 = 5$

$$\begin{aligned} y_P &= m \cdot x_P + q \\ 2 &= 5 \cdot 1 + q \\ q &= -3 \end{aligned}$$

Tangentengleichung $t\colon\ y = 5x - 3$

(c) $f(x) = 4x^7 - 16x^4 + 7x$; $P(1, y_P)$

$y_P = f(1) = 4 - 16 + 7 = -5$

$f'(x) = 28x^6 - 64x^3 + 7$

$m = f'(1) = 28 - 64 + 7 = -29$

$$\begin{aligned} y_P &= m \cdot x_P + q \\ -5 &= -29 \cdot 1 + q \\ q &= 24 \end{aligned}$$

Tangentengleichung $t\colon\ y = -29x + 24$

Aufgabe 3.3

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ 3(x^2 - 2x - 3) &= 0 \\ 3(x+1)(x-3) &= 0 \\ x_1 &= -1 \quad \Rightarrow \quad P_1(-1, 12) \\ x_2 &= 3 \quad \Rightarrow \quad P_2(3, 20) \end{aligned}$$

(b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 12x^2 &= 0 \\ 4x^2(x+3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 10) \\ x_2 &= -3 \quad \Rightarrow \quad P_2(-3, -17) \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x + \frac{2}{5}$

$f'(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 \\ \text{(TR)} \quad x_1 &= -2 \quad \Rightarrow \quad P_1(-2, 10) \\ x_2 &= 2 \quad \Rightarrow \quad P_2(2, 9.2) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 8$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ 3x^2 - 12x + 2 &= 2 \\ 3x(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 8) \\ x_2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad P_2(4, -16) \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x + 3$

$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ x^3 - 2x^2 - 2x - 1 &= 2 \\ x^3 - 2x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \text{(TR)} \quad x_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -6.75) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

$f(x) = x^4 - 7x^2 + ax$

$f'(x) = 4x^3 - 14x + a$

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \\ 4 \cdot 8 - 14 \cdot 2 + a &= 3 \\ 4 + a &= 3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

$f(x) = ax^3 + bx$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(2) = 3 \quad \Rightarrow \quad 12a + b = 3 \quad (1)$

$P(2, -10)$ liegt auf dem Graphen von f: $x = 2$, $y = -10$

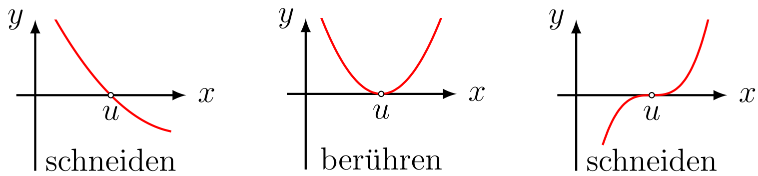
$8a + 2b = -10 \quad (2)$

Lösung von (1) und (2): $(a = 1,\, b = -9)$

Aufgabe 3.7

Berührt die Kurve p die x-Achse an der Stelle u, so sind zwei Bedingungen erfüllt:

- u ist eine Nullstelle; d. h. $f(u) \overset{(1)}{=} 0$.
- Für die Tangente im Berührpunkt gilt $f'(u) \overset{(2)}{=} 0$.



Vorsicht: eine horizontale Tangente bei einer Nullstelle bedeutet noch nicht, dass der Graph die x-Achse berührt. Es könnte sich auch um einen „schleifenden“ Schnitt handeln (Bild rechts). Um diese Situation zu erkennen, müsste überprüft werden, of für eine kleine Zahl $\varepsilon > 0$ die Funktionswerte an den Stellen $u - \varepsilon$ und $u + \varepsilon$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

(a) $p(x) = x^2 - 2ax - 7a$

$p'(x) = 2x - 2a$

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax - 7a &= 0 \quad (1)\\ 2x - 2a &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

(2) nach x auflösen: $x = a$ $(*)$

$x = a$ in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} a^2 - 2a^2 - 7a &= 0\\ a^2 + 7a = a(a+7) &= 0\\ a_1 &= 0\\ a_2 &= -7 \end{aligned}$$

$(*)$ Wir hätten (2) auch nach a auflösen und das Ergebnis in (1) einsetzen können. Dies hätte zu den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -7$ geführt. Diese Lösungen müssten wir dann in die Gleichung $a = x$ einsetzen, die Resultate (für a) zu bekommen.

(b) $p(x) = ax^2 + ax - 3$

$p'(x) = 2ax + a$

$$\begin{aligned} ax^2 + ax - 3 &= 0 \quad (1)\\ 2ax + a &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

(2) nach x auflösen: $x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}a - 3 &= 0 \\
a - 2a - 12 &= 0 \\
-a - 12 &= 0 \\
a &= -12
\end{aligned}$$

(c) $p(x) = 2x^2 - ax + 2a + 10$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 2\,x^2 - a\,x + 2\,a + 10 && (1) \\
p'(x) &= 4\,x - a && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'(x) &= 0 \\
4x - a &= 0 \\
x &= \tfrac{1}{4}a
\end{aligned}$$

Lösung in $p(x) = 0$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0 \\
-\tfrac{1}{8}a^2 + 2a + 10 &= 0 \quad || \cdot (-8) \\
a^2 - 16a - 80 &= 0 \\
(a - 20)(a + 4) &= 0 \\
a_1 &= 20 \\
a_2 &= -4
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^2 + 2$

$y_0 = f(1) = 5$

$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 10x$

$m = f'(1) = 3$

$$\begin{aligned}
y_0 &= m \cdot x_0 + q \\
5 &= 3 \cdot 1 + q \\
q &= 2
\end{aligned}$$

$t\colon y = 3x + 2$

Aufgabe 3.9

(a) $f(x) = 2x^2 - 5$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(2) = 3$

$f'(x) = 4\,x$

$m_t = f'(2) = 8$

$$y_0 = m_t \cdot x_0 + q_t$$
$$3 = 8 \cdot 2 + q_t$$
$$q_t = -13 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = 8\,x - 13$$

$$m_t \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = -\tfrac{1}{8}$$

$$y_0 = m_n \cdot x_0 + q_n$$
$$3 = -\tfrac{1}{8} \cdot 2 + q$$
$$q = \tfrac{13}{4}$$

$$n\colon y = -\tfrac{1}{8}x + \tfrac{13}{4}$$

(b) $f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 4$

$$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(1) = 2$$

$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x$$

$$m_t = f'(1) = -3$$

$$y_0 = m_t \cdot x_0 + q_t$$
$$2 = -3 \cdot 1 + q_t$$
$$q_t = 5 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = -3\,x + 5$$

$$m_n = -1/m_t = \tfrac{1}{3}$$

$$y_0 = m_t \cdot x_0 + q_t$$
$$2 = \tfrac{1}{3} \cdot 1 + q$$
$$q = \tfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad n\colon y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{3}{2}x^2$$

$$g\colon 6x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g\colon y = 6x$$

da die Gerade $g\colon y = -6x$ die Steigung $m_g = -6$ hat, muss die senkrecht zu g stehenden Tangente die Steigung $m = \frac{1}{6}$ haben.

$$f'(x) = \tfrac{1}{6}$$
$$\tfrac{3}{2}x^2 = \tfrac{1}{6}$$
$$x^2 = \tfrac{1}{9}$$
$$x_{1,2} = \pm\tfrac{1}{3}$$

$$t_1(x) = f\big(\tfrac{1}{3}\big) + f'\big(\tfrac{1}{3}\big)\big(x - \tfrac{1}{3}\big) = \tfrac{1}{54} + \tfrac{1}{6}\big(x - \tfrac{1}{3}\big) = \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{27}$$

$$t_2(x) = f\big(-\tfrac{1}{3}\big) + f'\big(-\tfrac{1}{3}\big)\big(x + \tfrac{1}{3}\big) = -\tfrac{1}{54} + \tfrac{1}{6}\big(x + \tfrac{1}{3}\big) = \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{54}$$

Aufgabe 3.11

Die gesuchte Gerade h steht senkrecht zur Geraden $g\colon y = -\frac{1}{5}x + 1$ und hat somit die Steigung $m_h = 5$. ($g \perp h \;\Leftrightarrow\; m_g \cdot m_h = -1$)

$h(x) = 5x + q$

An welcher Stelle hat p dieselbe Steigung wie h?

$p'(x) = 4x - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$y = p(2) = 8 - 6 = 2$

$P(2,2)$ liegt auf der Parabel und der Geraden h:

$2 = 5 \cdot 2 + q \quad \Rightarrow \quad q = -8$

$h\colon y = 5x - 8$

Aufgabe 3.12

Gegeben: $p_1\colon y = x^2 + ax$ und $p_2\colon y = x^2 + a$

x-Koordinate des Schnittpunkts:
$$\begin{aligned} x^2 + ax &= x^2 + a \\ ax &= a \\ x &= 1 \end{aligned}$$

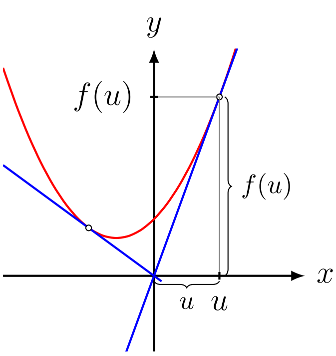
Tangentensteigungen:

- $p_1'(x) = 2x + a \quad \Rightarrow \quad m_1 = p_1'(1) = 2 + a$
- $p_2'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad m_2 = p_2'(1) = 2$

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ (2+a) \cdot 2 &= -1 \\ 2a &= -5 \\ a &= -2.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.13

Lösungsidee:



Bedingung für die Tangente(n):

$$f'(u) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u)}{u}$$

(a) $f(x) = x^2 + 4$; $f'(x) = 2x$

$$2u = \frac{u^2+4}{u}$$
$$2u^2 = u^2 + 4$$
$$u^2 = 4$$
$$u_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_1(2, 8)$$
$$u_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad P_2(-2, 8)$$

(b) $f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$; $f'(x) = 2x - 6$

$$2u - 6 = \frac{u^2 - 6u + 9}{u}$$
$$2u^2 - 6u = u^2 - 6u + 9$$
$$u^2 - 9 = 0$$
$$u_1 = -3 \quad \Rightarrow \quad P_1(-3, 36)$$
$$u_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad P_2(3, 0)$$

(c) $f(x) = x^3 + 2$; $f'(x) = 3x^2$

$$3u^2 = \frac{u^3+2}{u}$$
$$3u^3 = u^3 + 2$$
$$2u^3 = 2$$
$$u^3 = 1$$
$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad P(1, 3)$$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 4$; $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$$\tfrac{3}{2}u^2 - 6 = \frac{\frac{1}{2}u^3 - 3u^2 - 4}{u}$$
$$\tfrac{3}{2}u^3 - 6 = \tfrac{1}{2}u^3 - 3u^2 - 4$$
$$u^3 + 3u^2 - 2 = 0$$
$$u_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad P(-1, -7.5)$$
$$u_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, -12)$$

Aufgabe 3.14

(a) $f_1(x) = 2x + 3$; Nullstellen: $x = -1.5$
$f_2(x) = x^2$; Nullstellen: $x = 0$
Schnittpunkte: $2x + 3 = x^2$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$
$$0 = (x+1)(x-3)$$
$$x_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad S_1(-1, 1)$$
$$x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad S_2(3, 9)$$

Ableitungen: $f_1'(x) = 2$; $f_2'(x) = 2x$

Tangengensteigungen bei S_1: $m_1 = f_1'(-1) = 2$, $m_2 = f_2'(-1) = -2$

$$\text{Schnittwinkel bei } S_1\text{: } \varphi_1 = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$
$$= \arctan\left|\frac{2-(-2)}{1+(-4)}\right| = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$$

Tangentensteigungen bei S_2: $m_1 = f_1'(3) = 2$, $m_2 = f_2'(3) = 6$

$$\text{Schnittwinkel bei } S_2\text{: } \varphi_1 = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$
$$= \arctan\left|\frac{2-6}{1+2\cdot 6}\right| = \arctan\left(\frac{4}{13}\right) = 17.10°$$

(b) $f_1(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$; Nullstellen: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

$f_2(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$; Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

Schnittpunkte:
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 2x - 3 \\ 0 &= 2x - 6 \\ x &= 3 \quad \Rightarrow \quad S(3,0) \end{aligned}$$

Ableitungen: $f_1'(x) = 2x - 4$; $f_2'(x) = 2x - 2$

Tangentensteigungen bei S: $m_1 = f_1'(3) = 2$, $m_2 = f_2'(3) = 4$,

$$\text{Schnittwinkel bei } S\text{: } \varphi_1 = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$
$$= \arctan\left|\frac{2-4}{1+2\cdot 4}\right| = \arctan\left(\frac{2}{9}\right) = 12.53°$$

(c) fehlt

(d) fehlt

Aufgabe 3.15

(a) $p_1(x) = x^4 - 7 \quad \Rightarrow \quad p_1'(x) = 4x^3$

$p_2(x) = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad p_2'(x) = 2x$

Schnittstellen:
$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_2(x) \\ x^4 - 7 &= x^2 + 5 \\ x^4 - x^2 - 12 &= 0 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 3) &= 0 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

$S_1 = (2,9)$, $S_2 = (-2,9)$ (nur S_1 liegt im 1. Quadranten)

Steigungen bei $x_1 = 2$: $m_1 = p_1'(2) = 32$

$$m_2 = p_2'(2) = 4$$

$$\Delta\varphi = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \arctan\left(\frac{28}{129}\right) = 12.25°$$

(b) fehlt

Aufgabe 3.16

(a) fehlt

(b) fehlt

Aufgabe 3.17

(a) fehlt

(b) fehlt

Aufgabe 3.18

(a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$

$$f'(x) = 8x - 8$$
$$f''(x) = 8$$

(b) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 7$

$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2$$
$$f''(x) = 20x^3 - 18x$$

(c) $f(x) = (x-1)(x^3+3) = x^4 - x^3 + 3x - 3$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x$$

Aufgabe 3.19

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}$

$$f'(x) = x^2 - 4x$$
$$f''(x) = 2x - 4$$
$$f'''(x) = 2$$

$$\begin{aligned}\text{notwendige Bedingung:}\quad f''(x) &= 0\\ 2x-4&=0\\ x&=2\end{aligned}$$

Lösung testen: $f'''(2) = 2 \neq 0$ (ok)

WeP$(2, -5)$

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 200$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72$

$f''(x) = 12x^2 - 12x - 72 = 12(x^2 - x - 6)$

$f'''(x) = 24x - 12$

$$\begin{aligned}\text{notwendige Bedingung:}\qquad f''(x) &= 0\\ 12(x^2-x-6) &= 0\\ (x-3)(x+2) &= 0\\ x_1 &= 3\\ x_2 &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Lösungen testen:}\quad f'''(3) &= 60 \neq 0 \quad \text{(ok)}\\ f'''(-2) &= -60 \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= -97 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_1(3, -97)\\ f(-2) &= -88 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{WeP}_2(-2, 88)\end{aligned}$$

Aufgabe 3.20

$f(x) = x^3 + kx^2 + 2$

$f'(x) = 2x^2 + 2kx$

$f''(x) = 4x + 2k$

$f''(x) = 4$

notwendige Bedingung für eine Wendestelle x_w: $f''(x_w) = 0$

$f''(x) = 0$

$4x + 2k = 0 \quad (x = 3 \text{ einsetzen})$

$12 + 2k = 0$

$k = -6$

Test: $f'''(-6) = 4 \neq 0$ (hinreichende Bedingung ist erfüllt)

Aufgabe 3.21

Zuerst werden die Wendestellen bestimmt und anschliessend die Wendetangente(n) mit Hilfe der zugehörigen Taylorreihe.

(a) $$\begin{aligned}p(x) &= x^3 + 2x\\ p'(x) &= 3x^2 + 2\\ p''(x) &= 6x\\ p'''(x) &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p''(x) &= 0\\ 6x &= 0\\ x &= 0 \quad \text{Test: } f'''(0) = 6 \neq 0 \text{ (ok)}\end{aligned}$$

$$t(x) = p(0) + p'(0) \cdot (x - 0) = 0 + 2 \cdot x = 2x$$

(b) $$\begin{aligned}p(x) &= x^3 - 3x^2 + 4x + 2\\ p'(x) &= 3x^2 - 6x + 4\\ p''(x) &= 6x - 6\\ p'''(x) &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p''(x) &= 0\\ 6x - 6 &= 0\\ x &= 1 \quad \text{Test: } f'''(1) = 6 \neq 0 \text{ (ok)}\end{aligned}$$

$$t(x) = p(1) + p'(1) \cdot (x - 1) = 4 + 1 \cdot (x - 1) = x + 3$$

(c) $$\begin{aligned}p(x) &= x^4 - 4x^3 + 3x + 1\\ p'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 3\\ p''(x) &= 12x^2 - 24x\\ p'''(x) &= 24x - 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p''(x) &= 0\\ 12x^2 - 24x &= 0\\ 12x(x - 2) &= 0\\ x_1 &= 0 \quad \text{Test: } f'''(0) = -24 \neq 0 \text{ (ok)}\\ x_2 &= 2 \quad \text{Test: } f'''(2) = 24 \neq 0 \text{ (ok)}\end{aligned}$$

$$t_1(x) = p(0) + p'(0) \cdot (x - 0) = 1 + 3 \cdot x = 3x + 1$$

$$t_2(x) = p(2) + p'(2) \cdot (x - 2) = -9 - 13 \cdot (x - 2) = -13x + 17$$

Aufgabe 3.22

$f(x) = \frac{1}{3}\big(4x^3 - x^4\big) = \frac{1}{3}x^3(4-x)$

$f'(x) = \frac{1}{3}\big(12x^2 - 4x^3\big) = \frac{4}{3}x^2(3-x)$

$f''(x) = \frac{1}{3}(24x - 12x^2) = 4x(2-x)$

$f'''(x) = \frac{1}{3}(24 - 24x) = 8(1-x)$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten
$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \big(-\frac{1}{3}x^4\big) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(-\frac{1}{3}x^4\big) = -\infty$

Nullstellen: $\frac{1}{3}x^3(4-x) = 0$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 4$$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Extrempunkte:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \tfrac{4}{3}x^2(3-x) &= 0 \\ x_1 &= 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = 0 \;\Rightarrow\; \text{TeP}(?) \\ x_2 &= 3 \;\Rightarrow\; f''(3) = -12 \;\Rightarrow\; \text{HoP}(3,9) \end{aligned}$$

Wendepunkte:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 4x(2-x) &= 0 \\ x_1 &= 0 \;\Rightarrow\; f'''(0) = 8 \;\Rightarrow\; \text{TeP}(0,0) \\ x_2 &= 2 \;\Rightarrow\; f'''(2) = -8 \;\Rightarrow\; \text{WeP}(2, \tfrac{16}{3}) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.23

$f(x) = \frac{1}{9}\big(x^3 - 27x\big) = \frac{1}{9}x\big(x^2 - 27\big)$

$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 27) = \frac{1}{3}(x^2 - 9) = \frac{1}{3}(x-3)(x+3)$

$f''(x) = \frac{2}{3}x$

$f'''(x) = \frac{2}{3}$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: nur Monome mit ungeraden Exponenten
$\Rightarrow$ Graph symmetrisch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{9}x^3\right) = -\infty$

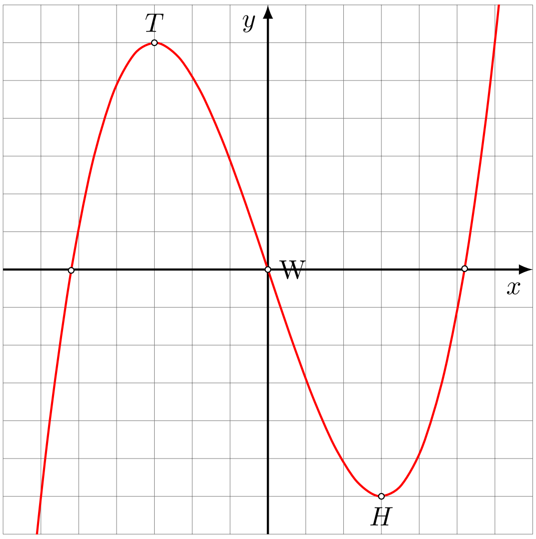
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{9}x^3\right) = +\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$
$0 = \frac{1}{9}x(x^2 - 27)$
$x_1 = 0$
$x_2 = 3\sqrt{3} \approx 5.20$
$x_3 = -3\sqrt{3} \approx -5.20$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$
$0 = \frac{1}{3}(x-3)(x+3)$
$x_1 = -3 \;\Rightarrow\; f''(-3) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(-3, 6)$
$x_2 = 3 \;\Rightarrow\; f''(3) = 2 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TiP}(3, -6)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$
$0 = \frac{2}{3}x$
$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; f'''(0) = \frac{2}{3} \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}(0, 0)$
Graph:


T
y
W
x
H

Aufgabe 3.24

$$f(x) = \tfrac{1}{27}(15x^3 - x^5) = \tfrac{1}{27}x^3(15 - x^2)$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{27}(45x^2 - 5x^4) = \tfrac{5}{27}x^2(9 - x^2)$$
$$f''(x) = \tfrac{1}{27}(90x - 20x^3) = \tfrac{10}{27}x(9 - 2x^2)$$
$$f'''(x) = \tfrac{1}{27}(90 - 60x^2) = \tfrac{30}{27}(3 - 2x)$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: nur Monome mit ungeraden Exponenten
$\Rightarrow$ Graph symmetrisch zum Ursprung

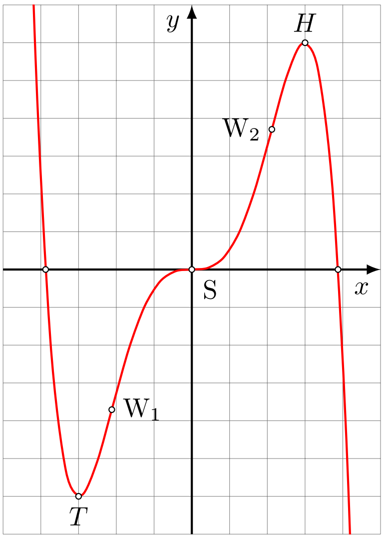
asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\tfrac{1}{27}x^5\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\tfrac{1}{27}x^5\right) = -\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$
$0 = x^3(15 - x^2)$
$x_1 = -\sqrt{15} \approx -3.87$
$x_2 = \sqrt{15} \approx 3.87$
$x_3 = 0$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$
$0 = x^2(9 - x^2)$
$x_1 = -3 \;\Rightarrow\; f''(-3) = 10 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TiP}(-3, -6)$
$x_2 = 3 \;\Rightarrow\; f''(3) = -10 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(3, 6)$
$x_3 = 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TeP}(?)$
Wendepunkte: $f''(x) = 0$
$0 = x(9 - 2x^2)$
$x_1 = -2.12 \;\Rightarrow\; f'''(x_1) = -6.\overline{6} \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}_1(-2.12, -3.71)$
$x_2 = 2.12 \;\Rightarrow\; f'''(x_2) = 6.\overline{6} \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}_2(2.12, 3.71)$
$x_3 = 0 \;\Rightarrow\; f'''(0) = 3.\overline{3} \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TeP}(0, 0)$
Graph:


y
H
W$_2$
S
x
W$_1$
T

Aufgabe 3.25

$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$

$f'(x) = 6x - 2x^3$

$f''(x) = 6 - 6x^2$

$f'''(x) = -12x$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: nur Monome mit geraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph symmetrisch zur y-Achse

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x^4\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}x^4\right) = -\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$0 = 3x^2 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{2}x^2\left(6 - x^2\right)$

$x_1 = -\sqrt{6} \approx -2.45$

$x_2 = \sqrt{6} \approx 2.45$

$x_3 = 0$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$0 = 6x - 2x^3$

$x_1 = -\sqrt{3} \;\Rightarrow\; f''(-\sqrt{3}) = -12 < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(-1.73, 4.5)$

$x_2 = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; f''(\sqrt{3}) = -12 < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(1.73, 4.5)$

$x_3 = 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = 6 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TiP}(0, 0)$

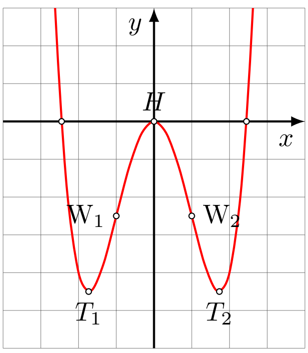
Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$0 = 6 - 6x^2$

$x_1 = -1 \;\Rightarrow\; f'''(-1) = 12 \neq 0; \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}_1(-1, 2.5)$

$x_2 = 1 \;\Rightarrow\; f'''(1) = -12 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}_2(1, 2.5)$

Graph:



Aufgabe 3.26

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{3}(x^4 - 8x^3 + 18x^2) = \tfrac{1}{3}x^2(x^2 - 8x + 18)\\
f'(x) &= \tfrac{1}{3}(4x^3 - 24x^2 + 36x) = \tfrac{4}{3}x(x^2 - 6x + 9)\\
f''(x) &= \tfrac{1}{3}(12x^2 - 48x + 36) = 4(x^2 - 4x + 3)\\
f'''(x) &= 4(2x - 4) = 8(x - 2)
\end{aligned}$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x^4\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^4\right) = +\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$0 = x^2(x^2 - 8x + 18)$

$x = 0$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 0$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2\\
x_1 &= 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = 12 > 0 \;\Rightarrow\; T(0,0)\\
x_{2,3} &= 3 \;\Rightarrow\; f''(3) = 0 \;\Rightarrow\; S?
\end{aligned}$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$0 = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

$x_1 = 1 \;\Rightarrow\; f'''(1) = 8 \neq 0 \;\Rightarrow\; W_1(1, 3.\overline{6})$

$x_2 = 3 \;\Rightarrow\; f'''(3) = -8 \neq 0 \;\Rightarrow\; W_2(3, 9)$

Graph:

Aufgabe 3.27

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = +\infty$

Nullstellen:

$0 = x^3 - 3x - 2 \quad = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = -2$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$0 = 3(x^2 - 1)$

$x_1 = -1 \;\Rightarrow\; f''(-1) = -6 \;\Rightarrow\; \text{HoP}(-1, 0)$

$x_2 = 1 \;\Rightarrow\; f''(1) = 6 \;\Rightarrow\; \text{TiP}(1, -4)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$0 = 6x$

$x = 0 \;\Rightarrow\; f'''(0) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WeP}(0, -2)$

Graph:

Aufgabe 3.28

$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 12x - 11)$
$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 12) = x^2 - 4$
$f''(x) = 2x$
$f'''(x) = 2$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$
$0 = \frac{1}{3}(x^3 - 12x - 12)$
$x_1 = -2.77$
$x_2 = -1.12$
$x_3 = 3.88$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = -4$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$
$0 = x^2 - 4$
$x_1 = -2 \;\Rightarrow\; f''(-2) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; \text{HoP}(-2, 1.\overline{3})$
$x_2 = 2 \;\Rightarrow\; f''(2) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; \text{TiP}(2, 9.\overline{3})$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$
$0 = 2x$
$x = 0 \;\Rightarrow\; f'''(0) = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WeP}(0, -4)$
Graph:

Aufgabe 3.29

$$f(x) = \tfrac{1}{25}\big(x^4 - 32x^2 + 31\big)$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{25}\big(4x^3 - 64x\big) = \tfrac{4}{25}x\big(x^2 - 16\big)$$
$$f''(x) = \tfrac{1}{25}\big(12x^2 - 64\big) = \tfrac{4}{25}\big(3x^2 - 16\big)$$
$$f'''(x) = \tfrac{24}{25}x$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: nur Monome mit geraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph symmetrisch zur y-Achse

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \big(\tfrac{1}{25}x^4\big) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\tfrac{1}{25}x^4\big) = +\infty$$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$0 = x^4 - 32x^2 + 31 = (x^2 - 31)(x^2 - 1)$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{31} \approx \pm 5.57$$
$$x_{3,4} = \pm 1$$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \tfrac{31}{25} = 1.24$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$0 = x\big(x^2 - 16\big)$$
$$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = -2.56 < 0 \;\Rightarrow\; \text{HoP}(0, 1.24)$$
$$x_2 = -4 \;\Rightarrow\; f''(-4) = 5.12 > 0 \;\Rightarrow\; \text{TiP}(-4, -9)$$
$$x_3 = 4 \;\Rightarrow\; f''(4) = 5.12 > 0 \;\Rightarrow\; \text{TiP}(4, -9)$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$0 = 3x^2 - 16$$
$$x_1 = -2.31 \;\Rightarrow\; f'''(-2.31) = -2.22 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WeP}(-2.31, -4.49)$$
$$x_2 = 2.31 \;\Rightarrow\; f'''(2.31) = 2.22 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WeP}(2.31, -4.49)$$

Graph:

Aufgabe 3.30

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4 \\
f'(x) &= 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \\
f''(x) &= 6x - 6 = 6(x-1) \\
f'''(x) &= 6
\end{aligned}
$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = +\infty$$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$0 = x^3 - 3x^2 + 4$

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = 4$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$0 = 3x(x-2)$

$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; f''(0) = -6 < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(0,4)$

$x_2 = 2 \;\Rightarrow\; f''(2) = 6 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TiP}(2,0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$0 = 6(x-1)$

$x = 1 \;\Rightarrow\; f'''(1) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}(1,2)$

Graph:

Aufgabe 3.31

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$
$f''(x) = 6x - 10$
$f''(x) = 6$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten
$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = +\infty$$

Nullstellen: $f(x) = 0$
$0 = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
$x_1 = 3$
$x_2 = 1$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = -3$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$
$0 = 3x^2 - 10x + 7$
$x_1 = 1 \;\Rightarrow\; f''(1) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(1, 0)$
$x_2 = 2.\overline{3} \;\Rightarrow\; f''(2.\overline{3}) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TiP}(2.\overline{3}, -1.19)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$
$0 = 6x - 10$
$x = \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; f'''(\frac{5}{3}) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}(1.\overline{6}, -0.\overline{592})$
Graph:

Aufgabe 3.32

$$f(x) = \tfrac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{5}(3x^2 - 6x - 9) = \tfrac{3}{5}(x^2 - 2x - 3)$$
$$f''(x) = \tfrac{1}{5}(6x - 6) = \tfrac{6}{5}(x - 1)$$
$$f'''(x) = \tfrac{6}{5}$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\tfrac{1}{5}x^3\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\tfrac{1}{5}x^3\right) = +\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$0 = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

$x_1 \approx 0.21$

$x_2 \approx 4.79$

$x_3 = -2$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = \tfrac{2}{5}$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$0 = \tfrac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = \dfrac{3}{5}(x+1)(x-3)$

$x_1 = 3 \;\Rightarrow\; f''(3) = 2.4 > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{TiP}(3, -5)$

$x_2 = -1 \;\Rightarrow\; f''(-1) = -2.4 < 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{HoP}(-1, 1.4)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$0 = x - 1$

$x = 1 \;\Rightarrow\; f'''(1) = \tfrac{6}{5} \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{WeP}(1, -1.8)$

Graph:

Aufgabe 3.33

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4x - 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 8x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 - 8$$
$$f'''(x) = 24x$$

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

Symmetrie: Monome mit geraden und ungeraden Exponenten

$\Rightarrow$ Graph weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4\right) = +\infty$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$0 = x^4 - 4x^2 + 4x - 1$$
$$x_1 = -\sqrt{2} - 1 \approx -2.41$$
$$x_2 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$$
$$x_3 = 1$$

Ordinatenabschnitt: $f(0) = -1$

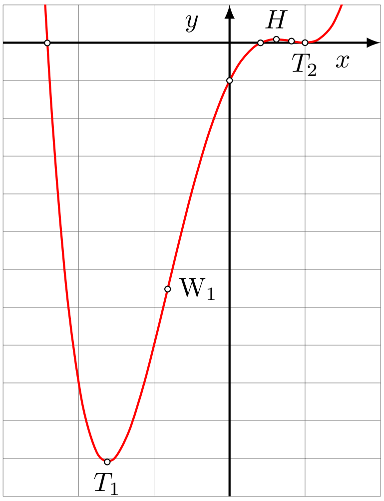
Extrempunkte: $(f'(x) = 0)$

$$0 = 4x^3 - 8x + 4$$
$$x_1 = -1.62 \;\Rightarrow\; f''(x_1) = 23.42 > 0 \;\Rightarrow\; \text{TiP}(-1.62, -11.09)$$
$$x_2 = 0.62 \;\Rightarrow\; f''(x_2) = -3.42 < 0 \;\Rightarrow\; \text{HoP}(0.62, 0.09)$$
$$x_3 = 1 \;\Rightarrow\; f''(x_3) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; \text{TiP}(1, 0)$$

Wendepunkte: $(f''(x) = 0)$

$$0 = 12x^2 - 8$$
$$x_1 = -0.82 \;\Rightarrow\; f'''(x_1) = -19.60 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WeP}_1(-0.82, -6.49)$$
$$x_2 = 0.82 \;\Rightarrow\; f'''(x_2) = 19.60 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{WeP}_2(0.82, 0.04)$$

Graph:



Aufgabe 3.34

Aufgabe 3.35

Aufgabe 3.36

Aufgabe 3.37

Aufgabe 3.38

Aufgabe 3.39

Aufgabe 3.40

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(-1) = 6$: $-a + b - c + d = 6 \quad (1)$

$f(1) = -10$: $a + b + c + d = -10 \quad (2)$

$f'(-1) = 0$: $3a - 2b + c = 0 \quad (3)$

$f'(1) = -12$: $3a + 2b + c = -12 \quad (4)$

$(2) - (1)$: $2a + 2c = -16 \quad (5)$

sys-solve $(3)\ (4)\ (5) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Aufgabe 3.41

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$f(1) = 1$: $a + b + c + d = 1 \quad (1)$

$f''(1) = 0$: $6a + 2b = 0 \quad (2)$

$f(0) = 0$: $d = 0 \quad (3)$

$f'(0) = -1$: $c = -1 \quad (4)$

(3) (4) $\Rightarrow$ (1) $\quad \Rightarrow \quad a + b - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = 2 \quad (5)$

sys-solve (2) (5) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 - x$

Aufgabe 3.42

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$f(2) = 0$: $16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \quad (1)$

$f'(2) = -3$: $32a + 12b + 4c + d = -3 \quad (2)$

$f(0) = 4$: $e = 4 \quad (3)$

$f'(0) = 0$: $d = 0 \quad (4)$

$f''(0) = 0$: $2c = 0 \quad (5)$

(3)–(5) in (1) und (2) einsetzen: $16a + 8b = -4 \quad (6)$
$$32a + 12b = -3 \quad (7)$$

sys-solve (6) (7) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^3 + 4$

Aufgabe 3.43

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Die Nullstellen von p sind auch die Nullstellen von f

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4$

$f(1) = 0$: $a + b + c = 0 \quad (1)$

$f(4) = 0$: $64a + 16b + 4c = 0 \quad (2)$

$f(0) = 0$: $d = 0 \quad (3)$

$f'(0) = 8$: $c = 8 \quad (4)$

(3) (4) in (1) (2) einsetzen: $\quad a+b=-8 \quad (5)$

$$64a+16b=-32 \quad (6)$$

sys-solve (5) (6) $\quad \Rightarrow \quad f(x)=2x^3-10x^2+8x$

Aufgabe 3.44

Ansatz: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

$f(1)=0$: $a+b+c+d+e=0 \quad (1)$

$f'(1)=0$: $4a+3b+2c+d=0 \quad (2)$

$f(0)=0$: $e=0 \quad (3)$

$f''(0)=0$: $2c=0 \quad (4)$

$f'(0)=2$: $d=2 \quad (5)$

(3)–(5) in (1) und (2) einsetzen: $\quad a+b=-2 \quad (6)$

$$4a+3b=-2 \quad (7)$$

sys-solve (6) (7) $\quad \Rightarrow \quad f(x)=4x^4-6x^3+2x$

Aufgabe 3.45

Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$0=4x-y+3$ Koordinatengleichung von g

$y=4x+3$ Achsenabschnitts-Steigungs-Form von g

$f(0)=3$: $d=3 \quad (1)$

$f'(0)=0$: $c=0 \quad (2)$

$f(2)=1$: $8a+4b+2c+d=1 \quad (3)$

$f'(2)=g'(2)=4$: $12a+4b+c=4 \quad (4)$

(1) (2) in (3) (4) einsetzen: $\quad 8a+4b=-2 \quad (5)$

$$12a+4b=4 \quad (6)$$

sys-solve (5) (6) $\quad \Rightarrow \quad f(x)=\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+3$

Aufgabe 3.46

Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=0$: $d=0 \quad (1)$

$f'(0) = 0$: $c = 0$ (2)

$f(3) = 9$: $27a + 9b + 3c + d = 9$ (3)

Die Tangente geht durch $(3, 9)$ und $(0, 0)$. Somit hat sie bei $x = 3$ die Steigung

$$m = \frac{0-9}{0-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$f'(3) = 3$: $27a + 6b + c = 3$ (4)

(1) (2) in (3) (4) einsetzen: $27a + 9b = 9$ (5)

$27a + 6b = 3$ (6)

sys-solve (5) (6) $\Rightarrow$ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

Aufgabe 3.47

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f(2) = 0$: $16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$ (1)

$f'(2) = 0$: $32a + 12b + 4c + d = 0$ (2)

$f(0) = -2$: $e = -2$ (3)

$f'(0) = 0$: $d = 0$ (4)

$f''(0) = 0$: $2c = 0$ (5)

(3)–(5) in (1) und (2) einsetzen: $16a + 8b = 2$ (6)

$32a + 12b = 0$ (7)

sys-solve (6) (7) $\Rightarrow$ $f(x) = -\frac{3}{8}x^4 + x^3 - 2$

Aufgabe 3.48

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen:

$6x + 0 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad A(3, 0)$

$6 \cdot 0 + y - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 18 \quad \Rightarrow \quad B(0, 18)$

Steigung von h: $y = -5x + 10 \quad \Rightarrow \quad m = -5$

Berührpunkt von G_f und G_h: $y = -5 \cdot 2 + 10 \quad \Rightarrow \quad C(2, 0)$

$f(3) = 0$: $27a + 9b + 3c + d = 0$ (1)

$f(0) = 18$: $d = 18$ (2)

$f(2) = 0$: $8a + 4b + 2c + d = 0$ (3)

$f'(2) = -5$: $12a + 4b + c = -5$ (4)

(2) in (1) und (3) einsetzen: $27a + 9b + 3c = -18 \quad (5)$

$$8a + 4b + 2c = -18 \quad (6)$$

sys-solve (4)–(6): $\quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

Aufgabe 3.49

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f(2) = 4$: $8a + 2b = 4 \quad (1)$

$f'(2) = 0$: $12a + b = 0 \quad (2)$

sys-solve (1) (2) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

Aufgabe 3.50

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$g\colon 4x - y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad g\colon y = 4x - 5$

$f(-1) = 9$: $a + b + c = 9 \quad (1)$

$f(2) = g(2) = 3$: $16a + 4b + c = 3 \quad (2)$

$f'(2) = g'(2) = 4$: $32a + 4b = 4 \quad (3)$

sys-solve (1)–(3) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = x^4 - 7x^2 + 15$

Aufgabe 3.51

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f''(x) = 12ax^2 + 2b$

$f(1) = 4$: $a + b + c = 4 \quad (1)$

$f''(1) = 0$: $12a + 2b = 0 \quad (2)$

Die Wendetangente geht durch die Punkte $P(1,4)$ und $(2,0)$ und hat somit die Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{2-1} = \frac{-4}{1} = -4$$

$f'(1) = -4$: $4a + 2b = -4 \quad (3)$

sys-solve (1)–(3) $\quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{13}{2}$

Aufgabe 3.52

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$

$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$

$f(1) = 3$: $a + b + c = 3$ (1)

$f(-2) = 0$: $-32a - 8b - 2c = 0$ (2)

$f'(-2) = 0$: $80a + 12b + c = 0$ (3)

sys-solve (1)–(3) $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{16}{3}x$

Aufgabe 3.53

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f(3) = -2$: $27a + 9b + 3c + d = -2$ (1)

$f'(3) = 0$: $27a + 6b + c = 0$ (2)

Weil die Tangente im Tiefpunkt $T(3, -2)$ horizontal ist, schneidet sie die Kurve an der Stelle $x = 1$ auf gleicher Höhe wie an der Stelle $x = 3$ – nämlich bei $y = -2$.

$f(1) = -2$: $-a + b - c + d = -2$ (3)

$f'(1) = 16$: $3a - 2b + c = 16$ (4)

$(1) - (3)$: $28a + 8b + 4c = 0$ (5)

sys-solve (2) (4) (5) $\Rightarrow$ $a = 1,\ b = -5,\ c = 3$

in (3) einsetzen: $-1 - 5 - 3 + d = -2$ $\Rightarrow$ $d = 7$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$

Aufgabe 3.54

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f(0) = 8$: $c = 8$ (1)

$f'(0) = -4$: $b = -4$ (2)

Wenn die quadratische Parabel die x-Achse berührt, dann hat die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ genau eine Lösung. Daher muss die Diskriminante $D = b^2-4ac$ den Wert 0 haben. Weil $c = 8$ und $b = -4$ bereits bekannt sind, können wir so a bestimmen:

$b^2 - 4ac = 0$

$16 - 32a = 0$

$a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

Aufgabe 3.55

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f(0) = 0$: $e = 0$ $\quad$ (1)

$f'(0) = 0$: $d = 0$ $\quad$ (2)

$f''(0) = 0$: $c = 0$ $\quad$ (3)

$$f''(1) = 0\text{: } 12a + 6b + 2c = 0 \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad 12a + 6b = 0$$
$$2a + b = 0 \quad (4)$$

$b = -2a$, $c = d = e = 0$ $\quad \Rightarrow \quad$ $f(x) = ax^4 - 2ax^3 = ax^3(x-2)$

$f'(2) = 0$: $32a + 12b = 4$ $\quad$ (5)

sys-solve (4) (5) $\quad \Rightarrow \quad$ $\frac{1}{2}x^4 - x^3$

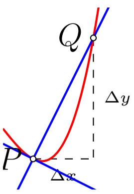
Aufgabe 3.56

$$\text{Ansatz: } \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$f(1) = 0$: $a + b + c + d = 0$ $\quad$ (1)

$f(3) = 4$: $27a + 9b + 3c + d = 4$ $\quad$ (2)

$f''(0) = 0$: $2b = 0$ $\quad$ (3)



$$m_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f'(1) = \frac{-1}{m_n} = -\frac{1}{2}\text{: } 3a + 2b + c = -0.5 \quad (4)$$

Einsetzen von $b = 0$:

(1) $\quad \Rightarrow \quad$ $a + c + d = 0$ $\quad$ (5)

(2) $\quad \Rightarrow \quad$ $27a + 3c + d = 4$ $\quad$ (6)

(4) $\quad \Rightarrow \quad$ $3a + c = -0.5$ $\quad$ (7)

sys-solve (5) (6) (7) $\quad \Rightarrow \quad$ $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x + 1$

Aufgabe 3.57

Aufgabe 3.58

Aufgabe 3.59

Zielfunktion: $V(l, b, h) = l \cdot b \cdot h$

Nebenbedingungen:

$h = x$

$b = 25 - 2x$

$l = (40 - 2x)/2 = 20 - x$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$V(x) = (20 - x)(25 - 2x)x = 2x^3 - 65x^2 + 500x$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$V'(x) = 6x^2 - 130x + 500 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5,\ x_2 = \frac{50}{3}$

$V''(x) = 12x - 13;$

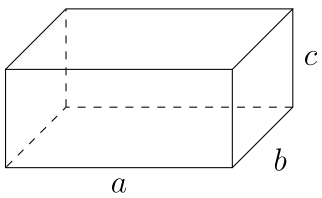
$V''(5) = -70 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$ ist Maximalstelle

$V''(\frac{50}{3}) = 70 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{50}{3}$ ist Minimalstelle

Übrige Grössen:

$l = 15\,\text{cm},\ b = 15\,\text{cm},\ h = 5\,\text{cm}$

Aufgabe 3.60



Zielfunktion: $S(a, b, c) = 2(ab + bc + ca)$

Nebenbedingungen:

$a = 3b$

$$
\begin{aligned}
4(a + b + c) &= 520 \\
a + b + c &= 130 \\
3b + b + c &= 130 \\
c &= 130 - 4b
\end{aligned}
$$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$
\begin{aligned}
S(b) &= 2\big(b \cdot 3b + 3b(130 - 4b) + (130 - 4b)b\big) \\
&= 2\big(3b^2 + 390b - 12b^2 + 130b - 4b^2\big) \\
&= 2\big(520b - 13b^2\big)
\end{aligned}
$$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$S'(b) = 2(520 - 26b) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = 20$

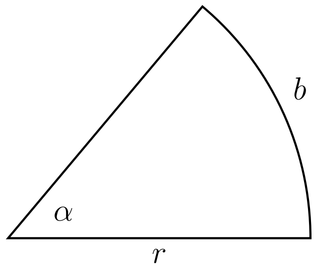
$$
\begin{aligned}
S''(b) &= -52 \\
S''(20) &= -52 < 0
\end{aligned}
$$

$b = 20$ ist Maximalstelle

Lösung:

$b = 20\,\text{cm}$, $a = 3b = 60\,\text{cm}$, $c = 130 - 4b = 50\,\text{cm}$

Aufgabe 3.61



Zielfunktion: $A(r, b) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$

Nebenbedingungen:

$u = 2r + b = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad b = (u - 2r)$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$A(r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (u - 2r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot u - r^2$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$A'(r) = \frac{1}{2} \cdot u - 2r \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot u = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{4}u$

$A''(r) = -2 \quad \Rightarrow \quad A''(\frac{1}{4}u) = -2 < 0$

Für $r = \frac{1}{4}u$ ist ist der Flächeninhalt maximal.

gesuchte Grössen:

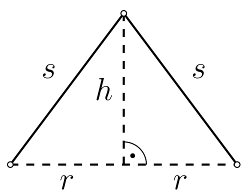
$b = u - 2r = u - 2 \cdot \frac{1}{4}u = \frac{1}{2}u$

$$\varphi = \frac{b}{2\pi r} \cdot 360° = \frac{u/2}{2\pi u/4} \cdot 360° = \frac{360°}{\pi} = 114.59°$$

Aufgabe 3.62

Aufgabe 3.63

ebener Schnitt entlang der Kegelachse:



s ist gegeben; r und h sind variabel

Zielfunktion: $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: $s^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = s^2 - h^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$V(h) = \frac{1}{3}\pi(s^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(s^2 h - h^3)$

Extrema:

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\big(s^2 - 3h^2\big)$

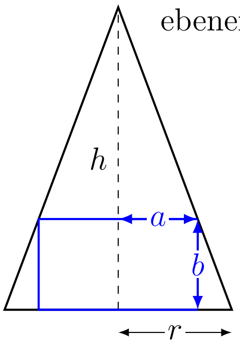
$V''(h) = \frac{1}{3}\pi\big(-6h\big) = -2\pi h < 0$

$$\begin{aligned} V'(h) &\overset{!}{=} 0 \\ s^2 - 3h^2 &= 0 \\ h &= s/\sqrt{3} \end{aligned}$$

$V''(h) = -2\pi h < 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \dfrac{\sqrt{3}s}{3}$ ist Maximalstelle

Lösung: Das Volumen wird für $h = \dfrac{\sqrt{3}s}{3}$ maximal.

Aufgabe 3.64



ebener Schnitt entlang der Kegelachse

$h = 6\,\text{cm}$

$r = 3\,\text{cm}$

Zielfunktion: $V(x, y) = \pi a^2 b$

Nebenbedingung: $a : 3 = (6 - b) : 6$ (2. Strahlensatz)

$$\begin{aligned} 6a &= 3(6 - b) \\ 2a &= 6 - b \\ b &= 6 - 2a \end{aligned}$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$V(a) = \pi \cdot a^2 \cdot \big(6 - 2a\big) = 2\pi\big(3a^2 - a^3\big)$

Extremstellen:

$V'(a) = 2\pi\big(6a - 3a^2\big)$

$V''(a) = 2\pi(6 - 6a) = 12\pi(1 - a)$

$$\begin{aligned} 6a - 3a^2 &= 0 \\ 3a(2 - a) &= 0 \end{aligned}$$

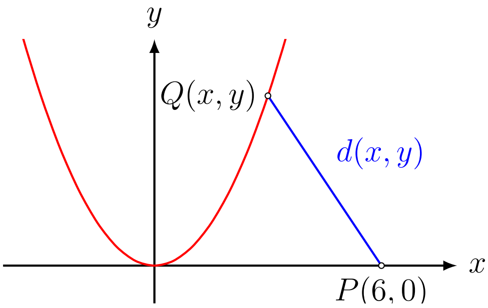
$a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V''(0) = 12\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimalstelle

$a_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad V''(2) = -12\pi < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximalstelle

Lösung:

Die Zylinderhöhe beträgt $b = 6 - 2a = 2\,\text{cm}$

Aufgabe 3.65



Zielfunktion:

$d(x, y) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$

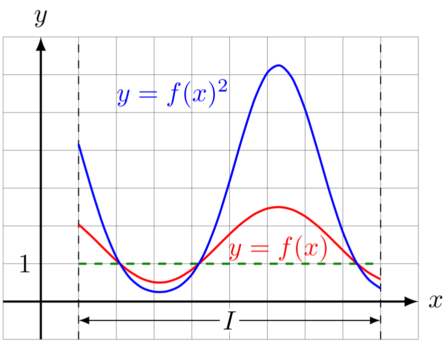
Nebenbedingung:

$y = \frac{1}{2}x^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36}$

Bemerkung: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist jede Maximalstelle [Minimalstelle] von f auch Maximalstelle [Minimalstelle] von $f(x)^2$.



Da $d(x)$ die Voraussetzung $d(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, können wir $D(x) = d(x)^2$ untersuchen, um die Extrema von $d(x)$ zu bestimmen.

Extrema:

$$\begin{aligned} D(x) &= \tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36 \\ D'(x) &= x^3 + 2x - 12 \\ D''(x) &= 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

$D'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Test: $D''(2) = 14 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$ ist Minimalstelle

Lösung:

$y_0 = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad Q(2, 2)$

Aufgabe 3.66

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.67

Zielfunktion:

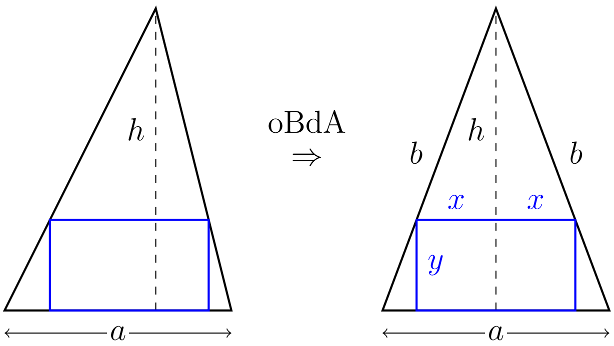
Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.68



Zielfunktion: $A(x, y) = 2xy$

Nebenbedingung: $2x : (h - y) = a : h$ (2. Strahlensatz)

$2xh = a(h - y) \quad \Rightarrow \quad 2x \stackrel{*}{=} \frac{a}{h}(h - y)$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$A(y) = \frac{a}{h}(h - y)y = \frac{a}{h}(hy - y^2)$

Extrema:

$A'(y) = \frac{a}{h}(h - 2y)$ (a und h sind konstant!)

$A''(y) = -\frac{2a}{h} < 0$ $(a > 0, h > 0)$

$h - 2y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = h/2$

Test: $A''(h/2) < 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = h/2$ ist Maximalstelle

Lösung:

$$2x_0 \overset{*}{=} \frac{a}{h}\big(h - y_0\big) = \frac{a}{h}\big(h - h/2\big) = a/2$$

Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen $a/2$ und $h/2$.

Aufgabe 3.69

Zielfunktion:

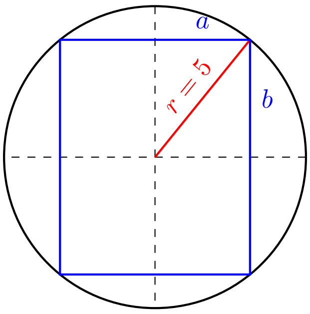
Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.70



Zielfunktion: $V(a, b) = \pi \cdot a^2 \cdot b$

Nebenbedingung:

$a^2 + b^2 = r^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 - b^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$V(b) = \pi\big(25 - b^2\big)b = \pi\big(25b - b^3\big)$

Extrema:

$$V'(b) = \pi\big(25 - 3b^2\big)$$
$$V''(b) = -6\pi b$$

$$\begin{aligned}\pi\big(25 - 3b^2\big) &\overset{!}{=} 0\\ 25 - 3b^2 &= 0\\ b^2 &= 25/3\\ b_0 &= 5/\sqrt{3}\end{aligned}$$

$V''\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right) = -10\sqrt{3}\pi < 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ ist Maximalstellle

Lösung: $h = 2b = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm} \approx 5.77\,\text{cm}$

Aufgabe 3.71

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.72

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.73

Zielfunktion:
$V(a,h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

Nebenbedingungen:
$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{1}{2}a^2}$
$4a + 4s = 80 \quad \Rightarrow \quad a + s = 20 \quad \Rightarrow \quad s = 20 - a$
Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$\begin{aligned} V(a) &= \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{(20-a)^2 - \tfrac{1}{2}a^2} = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{400 - 40a + a^2 - \tfrac{1}{2}a^2} \\ &= \sqrt{100a^4 - 10a^5 + \tfrac{1}{8}a^6} \end{aligned}$$

Extremstellen bestimmen und prüfen:
(die Wurzel wird maximal, wenn ihr Quadrat maximal wird)
$[V^2]'(a) = 400a^3 - 50a^4 + \frac{3}{4}a^5 = a^3\left(400 - 50a + \frac{3}{4}a^2\right) \stackrel{!}{=} 0$
$a_1 = 9.3,\ a_2 = 57.4,\ a_3 = 0$
$[V^2]''(a) = 1200a^2 - 200a^3 - \frac{15}{4}a^4$
$[V^2]''(9.3) \approx -29\,000 < 0$

$[V^2]''(57.4) \approx 6.8 \cdot 10^6 > 0$

Das Volumen der Pyramide wird für $a = 9.3\,\text{cm}$ maximal.

Aufgabe 3.74

Zielfunktion:

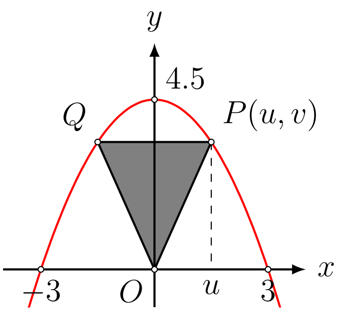
Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.75



Die Parabel hat die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ sowie den Ordinatenabschnitt $y_0 = 4.5$.

$p(x) = a(x-3)(x+3) = a(x^2-9) = ax^2 - 9a \;\Rightarrow\; a = -0.5$
$p(x) = 4.5 - 0.5x^2$

Zielfunktion: $A(u,v) = u \cdot v$

Nebenbedingung: $v = f(u) = 4.5 - 0.5u^2$
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$A(u) = u\big(4.5 - 0.5u^2\big) = 4.5u - 0.5u^3$

Extrema: $A'(u) = 4.5 - 1.5u^2$
$A''(u) = -3u$

$$\begin{aligned} 4.5 - 1.5u^2 &\stackrel{!}{=} 0 \\ u^2 &= 3 \\ u &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Test: $A''(3) = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad u = 3$ ist Minimalstelle

Lösung: $A(3) = 4.5 \cdot \sqrt{3} - 0.5 \cdot \big(\sqrt{3}\big)^3 = 3\sqrt{3}$

$$\angle(QPO) = \arctan \frac{f(3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = \arctan \frac{3}{3\sqrt{3}} = 60°$$

Symmetrie $\quad \Rightarrow \quad$ Auch die anderen Winkel messen $60°$.

Aufgabe 3.76

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.77

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.78

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.79

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.80

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.81

Zielfunktion:

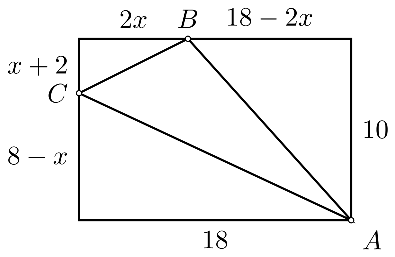
Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.82



Zielfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= 10 \cdot 18 - 5(18-2x) - x(x+2) - 9(8-x) \\ &= -x^2 + 17x + 18 \end{aligned}$$

Nebenbedingung: $0 < x < 8$ $\quad$ ($0 < 2x < 18$ ist „schwächer")

Extremstellen bestimmen:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 0 \\ -2x + 17 &= 0 \\ x &= 8.5 \quad \text{erfüllt NB nicht} \end{aligned}$$

$F(x)$ wird für $x = 8$ maximal.

Aufgabe 3.83

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.84

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

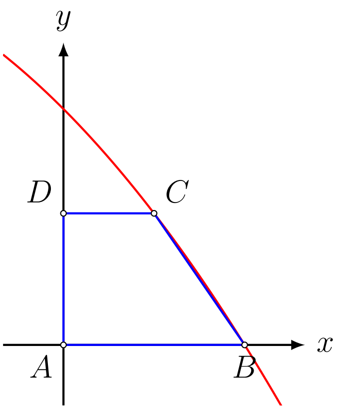
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.85

p: $y = -0.1(x^2 + 10x - 39)$



Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung: