Aufgabe 2.13

(a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)/x^2}{(x^2+2)/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^2}{1+2/x^2}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)/x^2}{(x^2-1)/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2/x-3/x^2}{1-1/x^2}=\frac{0-0}{1-0}=0$$

(c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{2x^2+1}&=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-4x+1)/x^2}{(2x^2+1)/x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{4-4/x+1/x^2}{2+1/x^2}=\frac{4-0+0}{2+0}=2\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(x+4)}{(3-x)^2}&=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3x-4}{9-6x+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x^2-3x-4)/x^2}{(9-6x+x^2)/x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-3/x-4/x^2}{9/x^2-6/x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-0-0}{0-0+1}=-1\end{aligned}$$

(e) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-4}=\infty$$

(f) $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$ existiert nicht

(g) $$\lim_{x\to\infty}3^{-x}=0$$

(h) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\operatorname{sgn}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1}=\infty$$

(i) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Aufgabe 2.14

(a) $\lim_{x\to 5}(2x-1) = 2\cdot 5 - 1 = 9$

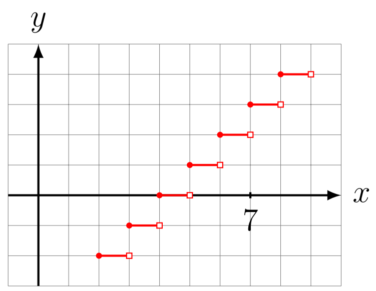
(b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{3^2}{3-2} = 9$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+3) = 3$

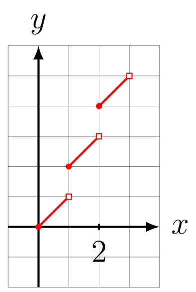
(d) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4}\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{8}$

(e) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x+5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x+5}{x+1} = 3$

(f) $\lim_{x\to 7}\lfloor x-4\rfloor$ existiert nicht

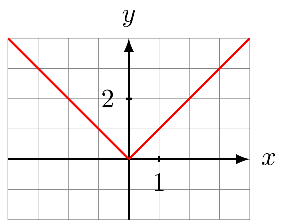


(g) $\lim_{x\to 2}\big(x+\lfloor x\rfloor\big)$ existiert nicht



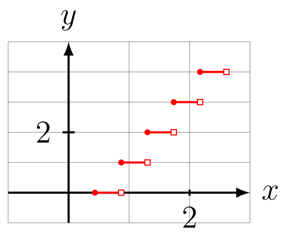
(h) $\lim_{x\to 0}\big(x\cdot \operatorname{sgn}(x)\big) = 0$

$$x\cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x\cdot 1 = x & \text{wenn } x > 0 \\ 0\cdot 0 = 0 & \text{wenn } x = 0 \\ x\cdot(-1) = -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$



(i) $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor 2.3x - 1 \rfloor = 3$

Durch die Stauchung des Graphen mit dem Faktor $\frac{1}{2.3}$ in x-Richtung, befindet sich die problematische Sprungstelle nicht mehr bei $x_0 = 2$.



Aufgabe 2.15

Für den Nachweis der Stetigkeit einer reellwertigen Funktion f an der Stelle x_0, genügt es, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Die Bedingung (2) ist etwas einfacher zu überprüfen, da es genügt, sich auf Folgen (x_n) zu beschränken, deren Folgeglieder alle kleiner bzw. grösser als x_0 sind.

(a) $f\colon y = x^2 + x, \quad x_0 = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} (x^2 + x) = 3^2 + 3 = 12$$
$$\lim_{x\to 3^+} (x^2 + x) = 3^2 + 3 = 12$$
$$f(3) = 3^2 + 3 = 12$$

$\Rightarrow \quad f$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 3$.

(b) $f\colon y = \lfloor x \rfloor, \quad x_0 = 5$

$$\lim_{x\to 5^-} \lfloor x \rfloor = 4$$
$$\lim_{x\to 5^+} \lfloor x \rfloor = 5$$
$$f(5) = \lfloor 5 \rfloor = 5$$

$\Rightarrow \quad f$ ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = 5$.

(c) $f\colon y = \lfloor x - 1 \rfloor, \quad x_0 = 2.5$

$$\lim_{x\to 2.5^-} \lfloor x - 1 \rfloor = 1$$
$$\lim_{x\to 2.5^+} \lfloor x - 1 \rfloor = 1$$
$$f(2.5) = \lfloor 2.5 - 1 \rfloor = \lfloor 1.5 \rfloor = 1$$

$\Rightarrow \quad f$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 2.5$.

(d) $f\colon y = |x-2| \qquad x_0 = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} |x-2| = 0$$
$$\lim_{x\to 2^+} |x-2| = 0$$
$$f(2) = |2-2| = |0| = 0$$

$\Rightarrow \quad f$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$.

(e) $f\colon y = \operatorname{sgn}(x-3), \qquad x_0 = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \operatorname{sgn}(x-3) = -1$$
$$\lim_{x\to 3^+} \operatorname{sgn}(x-3) = 1$$
$$f(3) = \operatorname{sgn}(3-3) = \operatorname{sgn}(0) = 0$$

$\Rightarrow \quad f$ ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = 3$.

(f) $f\colon y = \lfloor \cos x \rfloor, \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \cos(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$$
$$f(0) = \cos(0) = 1$$

$\Rightarrow \quad f$ ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 2.16

Die Funktion f lässt sich bei x_0 stetig fortsetzen, wenn der links- und der rechtseitige Grenzwert übereinstimmen; d. h. wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0.$$

In diesem Fall ist die *stetige Fortsetzung* $\tilde{f}$ *von* f *an der Stelle* x_0 wie folgt definiert:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \neq x_0 \\ y_0 & \text{wenn } x = x_0 \end{cases}$$

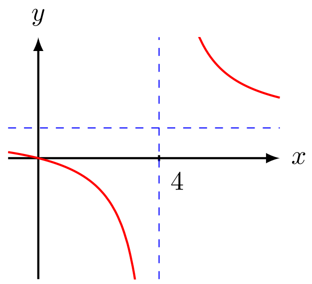
(a) $f\colon y = \dfrac{x}{x-4}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x}{x-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x}{x-4} = +\infty$$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 4$ nicht stetig fortsetzbar.



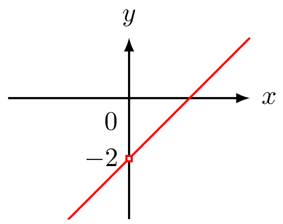
(b) $f\colon y = \dfrac{x^2-2x}{x} = \dfrac{x(x-2)}{x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x-2) = -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x-2) = -2$$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 0$ stetig fortsetzbar mit $\tilde{f}(0) = -2$.



(c) $f\colon y = \dfrac{x}{|x|-2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x}{|x|-2} = +\infty$

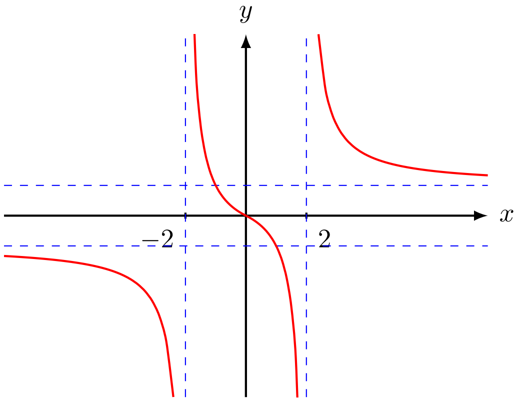
$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x}{|x|-2} = -\infty$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = -2$ nicht stetig fortsetzbar.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{|x|-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{|x|-2} = +\infty$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 2$ nicht stetig fortsetzbar.



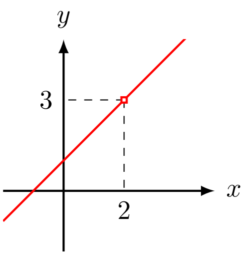
(d) $f\colon y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = 3$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 2$ stetig fortsetzbar mit $\tilde{f}(2) = 3$.



(e) $f\colon y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to -3^-} \frac{x+1}{x+3} = +\infty$$

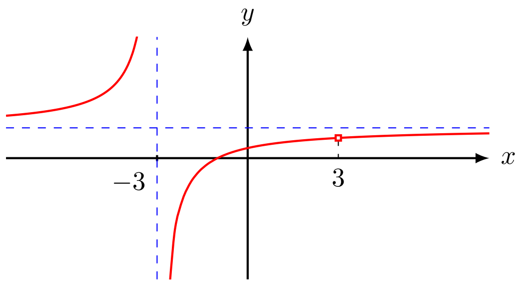
$$\lim_{x \to -3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to -3^+} \frac{x+1}{x+3} = -\infty$$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = -3$ nicht stetig fortsetzbar.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x+1}{x+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = -3$ stetig fortsetzbar mit $f(-3) = \frac{2}{3}$.



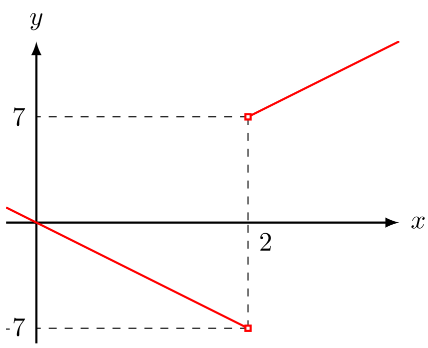
(f) $f\colon y = \dfrac{x}{\operatorname{sgn}(x-7)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

$$\lim_{x \to 7^-} \frac{x}{\operatorname{sgn}(x-7)} = -7$$

$$\lim_{x \to 7^+} \frac{x}{\operatorname{sgn}(x-7)} = 7$$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 7$ nicht stetig fortsetzbar.



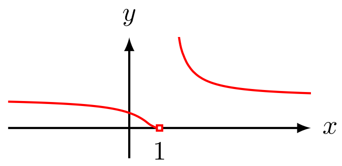
(g) $f\colon y = 2^{1/(x-1)}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 2^{1/(x-1)} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} 2^{1/(x-1)} = \infty$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 1$ nicht stetig fortsetzbar.



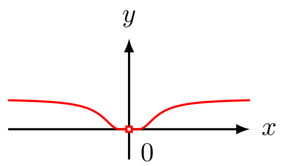
(h) $f\colon y = 2^{-1/x^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{-1/x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{-1/x^2} = 0$

$\Rightarrow$ f ist bei $x_0 = 0$ stetig fortsetzbar mit $\tilde{f}(0) = 0$.



Aufgabe 2.17

(a) $f\colon y = \lfloor 2x \rfloor$

Der Graph der Funktion $\lfloor \ldots \rfloor$ „springt“, wenn $2x \in \mathbb{Z}$:

$2x = k \quad$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
$x = 2/k \quad$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

$U = \{k/2\colon k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $f\colon y = \operatorname{sgn}(x + 3)$

Der Graph der sgn-Funktion „springt“, wenn $x + 3 = 0$:

$U = \{-3\}$

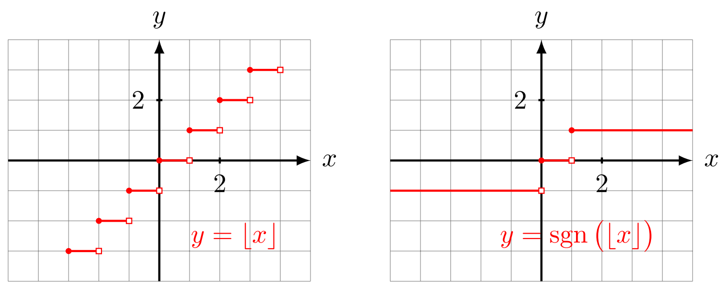
(c) $f\colon y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

Der Graph der Funktion $\lfloor \ldots \rfloor$ „springt“, wenn $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{x} = k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$
$$x = k^2 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

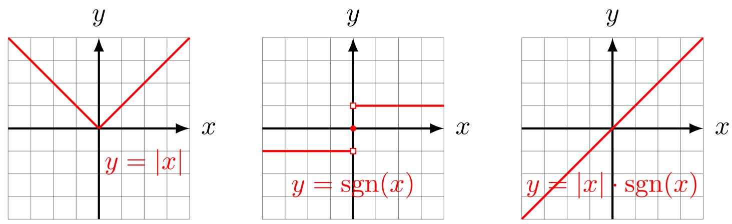
$U = \{k^2 \colon k \in \mathbb{N}\}$

(d) $f\colon y = \operatorname{sgn}\big(\lfloor x \rfloor\big)$



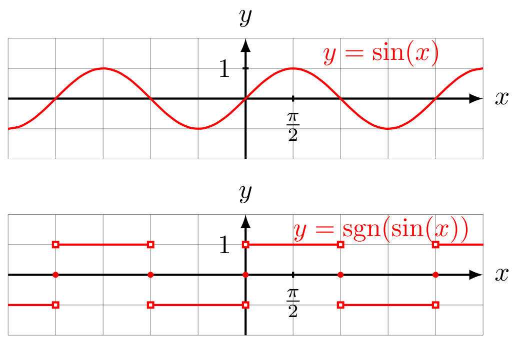
$U = \{0, 1\}$

(e) $f\colon y = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$



$U = \{\,\}$

(f) $f\colon y = \operatorname{sgn}\big(\sin(x)\big)$



$U = \{k \cdot \pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$