Aufgabe 1.30

$$\begin{aligned} a_4 + a_{14} &= 22 \\ a_8 &= a_3 + 4 \end{aligned}$$

Ersetze überall a_n durch die explizite Formel der AF: $a_n = a_1 + (n-1)d$. Damit verbleiben am Ende nur noch die Variablen a_1 und d im Gleichungssystem, so dass es lösbar wird.

$$\begin{aligned} (a_1 + 3d) + (a_1 + 13d) &= 22 \\ (a_1 + 7d) &= (a_1 + 2d) + 4 \end{aligned}$$

Vereinfache die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2a_1 + 16d &= 22 \quad (1) \\ 5d &= 4 \quad\;\; (2) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt $d = \frac{4}{5}$ und dann aus (3) $a_1 = 4.6$

Aufgabe 1.50 (Lösungsweg 1)

Gesucht sind drei Zahlen einer GF, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 14 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= -1728 \end{aligned}$$

Da wir drei Variablen aber nur zwei Gleichungen haben, müssen wir mindestens eine der Variablen durch die anderen ausdrücken. Da es sich bei den Zahlen um die Glieder eine GF handelt, können wir das explizite Bildungsgesetz der GF für einen „Ansatz" verwenden:

1. Zahl a_1
2. Zahl $a_2 = a_1 \cdot q$
3. Zahl $a_3 = a_1 \cdot q^2$

Den Ansatz in die obigen Gleichungen einsetzen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_1q + a_1q^2 &= 14 \\ a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 &= -1728 \end{aligned}$$

Vereinfachen:

$$\begin{aligned} a_1(1 + q + q^2) &= 14 \\ a_1^3q^3 &= -1728 \quad || \sqrt[3]{\ldots} \end{aligned}$$

Wenn wir in der unteren Gleichung auf beiden Seiten die dritte Wurzel ziehen, erhalten wir $a_1q = -12$. Diese Gleichung lösen wir nach a_1 auf und setzen $a_1 = -12/q$ in die obere Gleichung ein, die wir nach q auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{-12}{q}(1 + q + q^2) &= 14 \quad || \cdot (-q) \\ 12 + 12q + 12q^2 &= -14q \\ 12q^2 + 26q + 12 &= 0 \quad \text{(Taschenrechner)} \\ q_1 &= -\tfrac{3}{2} \\ q_1 &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Daraus folgt für $q = -\frac{3}{2}$: $a_1 = -12/q = 8$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q = -12 \\ a_3 &= a_2 \cdot q = 18 \end{aligned}$$

$q_2 = -\frac{2}{3}$ liefert dieselben Zahlen aber in umgekehrter Reihenfolge.

Aufgabe 1.50 (Lösungsweg 2)

Wenn man im Ansatz das erste und das letzte Folgeglied durch das mittlere ausdrückt, vereinfacht sich die Gleichung mit dem Produkt der Variablen, so dass keine dritte Wurzel gezogen werden muss. Man spricht hier von einem *symmetrischen Ansatz*:

1. Zahl $a_1 = a_2 : q$
2. Zahl $a_2 = a_2$ (mittlere Zahl im „Zentrum“)
3. Zahl $a_3 = a_2 \cdot q$

Bedingungen:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 14 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= -1728 \end{aligned}$$

Den Ansatz einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{q} + a_2 + a_2 \cdot q &= 14 \\ \frac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot q &= -1728 \end{aligned}$$

Die untere Gleichung lässt sich wegen des symmetrischen Ansatzes stark vereinfachen:

$$\begin{aligned} a_2 \left(\frac{1}{q} + 1 + q \right) &= 14 \\ a_2^3 &= -1728 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -12 \end{aligned}$$

$a_2 = -12$ in die oberen Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} -12 \left(\frac{1}{q} + 1 + q \right) &= 14 \quad || \cdot (-q) \\ 12(1 + q + q^2) &= -14q \\ 12 + 12q + 12q^2 &= -14q \\ 12q^2 + 26q + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Ab hier verläuft die Rechnung wie beim Lösungsweg 1.

Aufgabe 1.84

Es werden 3 Fälle unterschieden:

- Eine Folge ist *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert a besitzt.
- Eine Folge ist *uneigentlich konvergent* (oder: *bestimmt konvergent*), wenn sie entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ „strebt“. Präziser:

  Eine Folge *konvergiert uneigentlich* gegen $+\infty$ [bzw. $-\infty$], wenn es für jedes $K > 0$ [bzw. $K < 0$] ein n_0 gibt, so dass $a_n > K$ [bzw. $a_n < K$] für alle $n \geq n_0$ gilt.
- In allen anderen Fällen ist die Folge *(bestimmt) divergent.*

(a) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+2} = 0 \quad$ (konvergent)

(b) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{1+2/n} = 2 \quad$ (konvergent)

(c) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n+2} = \infty \quad$ (uneigentlich konvergent)

(d) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{n} = 2 \quad$ (konvergent)

(e) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+n\cdot(-1)^n}{n}$ existiert nicht (divergent)

(f) $a = \lim\limits_{n\to\infty} 3 - n\cdot(-1)^n$ existiert nicht (divergent)

(g) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^4 = 1 \quad$ (konvergent)

(h) $a = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{4}\right)^n = 0 \quad$ (konvergent)

(i) $a = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-1/n} = 1 \quad$ (konvergent)

Aufgabe 1.85

(a) $a_n = n^2$

$$a_n = n^2 > k$$
$$n > \sqrt{k}$$

Für $k = 100\,000$ muss $n > \sqrt{100\,000} = 316.23$ gewählt werden.

(b)
$$a_n = \frac{n^2+1}{n} > k$$
$$n^2 + 1 > nk$$
$$n^2 - nk > -1$$
$$n^2 - nk + \left(\frac{k}{2}\right)^2 > -1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$
$$\left(n - \frac{k}{2}\right)^2 > \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1$$
$$n - \frac{k}{2} > \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1}$$
$$n > \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1}$$

Für $k = 100\,000$ muss $n \geq 99999.99999$ gewählt werden.

(c)
$$a_n = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} > k$$
$$\frac{n^2}{2n-1} > k^2$$
$$n^2 > (2n-1)k^2$$
$$n^2 - 2nk^2 > -k^2$$
$$n^2 - 2k^2n + k^4 > -k^2 + k^4$$
$$(n-k^2)^2 > k^4 - k^2 = k^2(k^2-1)$$
$$n - k^2 > k\sqrt{k^2-1}$$
$$n > k^2 + k\sqrt{k^2-1}$$

Für $k = 100\,000$ muss $n > 19\,999\,999\,999.5$ gewählt werden.

Aufgabe 1.86

Wir fassen ab dem zweiten Folgeglied jeweils 1, 2, 4, 8, 16, … Glieder zusammen und schätzen die Teilsummen nach unten ab. Genauer:

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots
\end{aligned}$$

Da in der Summe immer weiter aufeinanderfolgende Summanden gefunden werden können, deren Summe grösser als $\frac{1}{2}$ ist, lässt sich mit genügend vielen Summanden jede Schranke K übertreffen. Da diese Schranke für eine untere Schranke der *kleineren* Teilsummenfolge ist, ist sie erst recht eine untere Schranke der ursprünglichen Teilsummenfolge.

Bemerkung: Ist K eine positive reelle Zahl, so lässt sich ein Index n, für den $s_n > K$ gilt, durch $n = 2^{2K-2}$ abschätzen. Hier einige Beispiele:

für $K = 5$ genügen 256 Summanden ($s_{256} = 6.124\ldots$)

für $K = 10$ genügen 16 384 Summanden ($s_{262\,144} = 13.053\ldots$)

für $K = 15$ genügen 268 435 456 Summanden ($s_{268\,435\,456} = 19.985\ldots$)

Aufgabe 1.87

(a) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-5} = 0; \quad \varepsilon = 0.1$

$$\left|\frac{1}{n-5} - 0\right| < 0.1$$

$$\frac{1}{2n-5} < 0.1$$

$$2n - 5 > 10$$

$$2n > 15$$

$$n > 7.5 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 8$$

(b) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{50}{n^2} = 0; \quad \varepsilon = 0.05$

$$\left|\frac{50}{n^2} - 0\right| < 0.05$$

$$\frac{50}{n^2} < 0.05$$

$$\frac{50}{0.05} < n^2$$

$$1000 < n^2$$

$$31.62 < n^2 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 32$$

(c) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+5} = 1; \quad \varepsilon = 0.02$

$$\left|\frac{n-1}{n+5} - 1\right| < 0.02$$

$$\left|\frac{n-1-(n+5)}{n+5}\right| < 0.02$$

$$\left|\frac{-6}{n+5}\right| < 0.02$$

$$\frac{6}{n+5} < 0.02$$

$$\frac{6}{0.02} < n+5$$

$$300 < n+5$$

$$295 < n \quad \Rightarrow \quad n_0 = 296$$

(d) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+4} = 3; \quad \varepsilon = 0.01$

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < 0.01$$

$$\left|\frac{3n-(3n+12)}{n+4}\right| < 0.01$$

$$\left|\frac{-12}{n+4}\right| < 0.01$$

$$\frac{12}{n+4} < 0.01$$

$$\frac{12}{0.01} < n+4$$

$$1200 < n+4$$

$$1196 < n \quad \Rightarrow \quad n_0 = 1197$$

(e) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{2^{n-2}} = 0; \quad \varepsilon = 0.0001$

$$\left|\frac{8}{2^{n-2}} - 0\right| < 0.0001$$

$$\frac{8}{0.0001} < 2^{n-2}$$

$$80\,000 < 2^{n-2} \quad || \log_2$$

$$16.288 < n-2$$

$$18.288 < n \quad \Rightarrow \quad n_0 = 19$$

(f) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{n^2} = -3; \quad \varepsilon = 0.001$

$$\left|\frac{2-3n^2}{n^2} - (-3)\right| < 0.001$$

$$\left|\frac{2-3n^2+3n^2}{n^2}\right| < 0.001$$

$$\left|\frac{2}{n^2}\right| < 0.001$$

$$\frac{2}{0.001} < n^2$$

$$2000 < n^2$$

$$44.72 < n \quad \Rightarrow \quad n_0 = 45$$

Aufgabe 1.89

$a_n = \dfrac{n-1}{2n+5}$

Auswahl der Teilfolge: $b_1 = a_2,\ b_2 = a_5,\ b_3 = a_8,\ \ldots,\ b_n = a_{3n-1}$

(a) $b_n = a_{3n-2} = \dfrac{(3n-1)-1}{2(3n-1)+5} = \dfrac{3n-2}{6n+3}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{6n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-2)/n}{(6n+3)/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-2/n}{6+3/n} = \dfrac{1}{2}$

Die Teilfolge (b_n) hat den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Folge (a_n), was nicht verwunderlich ist, wenn (a_n) konvergiert.

(c)

$$
\begin{aligned}
|b_n - b| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3n-2}{6n+3} - \frac{1}{2}\right| &< 0.001 \\
\left|\frac{2(3n-2)-(6n+3)}{2(6n+3)}\right| &< 0.001 \\
\left|\frac{-7}{12n+6}\right| &< 0.001 \\
\frac{7}{12n+6} &< 0.001 \\
7000 &< 12n+6 \\
582.8\overline{3} &< n
\end{aligned}
$$

Ab b_{583} liegen alle weiteren Folgeglieder *innerhalb* der gewählten ε-Umgebung von $b = \frac{1}{2}$. Somit liegen 582 Folgeglieder *ausserhalb* dieser Umgebung.

Grenzwertsätze

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gelten:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b} \quad$ (wenn $b \neq 0$)

Aufgabe 1.90

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+1/n}{2/n-1} = \dfrac{4}{-1} = -4$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3+\dfrac{1}{n}\right)\left(4-\dfrac{1}{n}\right) = 3\cdot 4 = 12$

(c) $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)^2 n}{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-6n^2+9n}{n^2+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3-6n^2+9n)/n^2}{(n^2+1)/n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-6+9/n}{1+1/n^2} = \frac{\infty}{1} = \infty \end{aligned}$$

Da die Folge $(n-3)^2$ divergent ist, können wir Limes- und Produktbildung nicht vertauschen. Nach geeigneten Umformungen erkennen wir, dass die Folge uneigentlich konvergiert (bestimmt divergiert).

(d) $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)^3}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{27n^3-27n^2+9n-1}{n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(27-\frac{27}{n}+\frac{9}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) = 27 \end{aligned}$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} 3+0.8^n = 3$

(f) $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(3n+5)}{(n+2)(4n-1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+7n-5}{4n^2+7n-2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{6+7/n-5/n^2}{4+7/n-2/n^2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(7+\dfrac{4n+1}{n+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(7+\dfrac{4+1/n}{1+3/n}\right) = 11$

(h) $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3/(n+1)-4/n}{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3/(n+1)-4/n}{1/n}\cdot\frac{n}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n+1}-4\right) = -1 \end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^3-n^3}{(n+4)^3+n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+12n^2+48n+64-n^3}{n^3+12n^2+48n+64+n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+48n+64}{2n^3+12n^2+48n+64} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{12/n+48/n^2+64/n^3}{2+12/n+48/n^2+64/n^3} = 0 \end{aligned}$$

(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/3^n}{3} = \frac{1}{3}$

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{1} = \infty$

(m) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n - 4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^2 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1}(4-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$

Aufgabe 1.91

Gegeben: Folge (s_n) mit $s_n = \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^2} + \ldots + \frac{3n-1}{n^2}$.

(a) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2+3n-1}{2} \cdot n = \frac{3n+1}{2n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{2}$

(c)
$$\left|\frac{3n+1}{2n} - \frac{3}{2}\right| < 0.001$$
$$\left|\frac{3n+1-3n}{2n}\right| < 0.001$$
$$\frac{1}{2n} < 0.001$$
$$500 < n \quad \Rightarrow \quad \text{ab } n = 501$$

Aufgabe 1.92

Gegeben: Folge (s_n) mit $s_n = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^2} - \ldots - \frac{n}{n^2}$

(a) $s_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = 1 - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2}$

$= 1 - \frac{n+1}{2n} = \frac{2n}{2n} - \frac{n+1}{2n} = \frac{n-1}{2n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$

(c)
$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{n}{2n}\right| < 0.001$$
$$\left|\frac{-1}{2n}\right| < 0.001$$
$$\frac{1}{2n} < 0.001$$
$$500 < n \quad \Rightarrow \quad \text{ab } n = 501$$

Aufgabe 1.95

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{9}{(3n-2)(3n+4)}\right)$$

(a) $p_1 = \frac{16}{7},\ p_2 = \frac{28}{10},\ p_3 = \frac{40}{13},\ p_4 = \frac{52}{16},\ \ldots$

$$p_n = \frac{12n+4}{3n+4}$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n+4}{3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{12+4/n}{3+4/n} = 4$

(c)
$$\begin{aligned}
p_m + 0.012 &= p \\
\frac{12m+4}{3m+4} + 0.012 &= 4 \quad || \cdot (3m+4) \\
12m + 4 + 0.012(3m+4) &= 12m + 16 \quad || - 12m - 4 \\
0.036m + 0.048 &= 12 \\
36m + 48 &= 12\,000 \\
36m &= 11\,952 \\
m &= 332
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.96

(a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$

nichtabbrechende GR mit $a_1 = 1$ und $q = \frac{1}{4}$

$$s = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

(b) $5 + \frac{3}{2} + \frac{9}{20} + \ldots$

nichtabbrechende GR mit $a_1 = 5$ und $q = \frac{3/2}{5} = \frac{3}{10}$

$$s = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{10}} = 5 \cdot \frac{10}{7} = \frac{50}{7}$$

(c) $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$

nichtabbrechende GR mit $a_1 = 3$ und $q = -\frac{1}{2}$

$$s = 3 \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = 3 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

(d) $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$

nichtabbrechende GR mit $a_1 = 1$ und $q = -\frac{2}{3}$

$$s = 1 \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

(e) $2 + \sqrt{2} + 1 + \ldots$

nichtabbrechende GR mit $a_1 = 2$ und $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$s = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{2}} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{4-2} = 2\big(2+\sqrt{2}\big)$$

(f) $8 + 4\sqrt{3} + 6 + \ldots$

nichtabbrechende GR mit $a_1 = 8$ und $q = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$s = \frac{8}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{16}{2-\sqrt{3}} = \frac{16(2+\sqrt{3})}{1} = 16\big(2+\sqrt{3}\big)$$

Aufgabe 1.97

(a) $5 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$

(b) $10 = \frac{1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{10} = 1 - q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{9}{10} = 0.9$

(c) $32 = \frac{a_1}{1-\frac{5}{8}} = \frac{a_1}{\frac{3}{8}} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 32 \cdot \frac{3}{8} = 12$

(d) $4a_1 = \frac{a_1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = 1 - q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{3}{4}$

Aufgabe 1.98

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots &= a_1 + 2.8 \quad || - a_1 \\ a_2 + a_3 + a_4 + \ldots &= 2.8 \end{aligned}$$

Auch $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ ist eine geometrische Reihe mit $q = 0.4$. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
a_2 \cdot \frac{1}{1-0.4} &= 2.8 \quad \text{(Summenformel)} \\
a_2 \cdot \frac{1}{0.6} &= 2.8 \qquad \cdot 0.6 \\
a_2 &= 1.68
\end{aligned}
$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 : q = 1.68 : 0.4 = 4.2$$

Aufgabe 1.99

(a)
$$
\begin{aligned}
10 \cdot 0.\overline{5} &= 5.55555\ldots && (1) \\
1 \cdot 0.\overline{5} &= 0.55555\ldots && (2) \\
9 \cdot 0.\overline{5} &= 5 && (1)-(2) \\
0.\overline{5} &= \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
100 \cdot 0.\overline{54} &= 54.545454\ldots && (1) \\
1 \cdot 0.\overline{54} &= 0.545454\ldots && (2) \\
99 \cdot 0.\overline{54} &= 54 && (1)-(2) \\
0.\overline{54} &= \frac{54}{99} = \frac{6}{11}
\end{aligned}
$$

(c)
$$
\begin{aligned}
1000 \cdot 0.\overline{543} &= 543.543543\ldots && (1) \\
1 \cdot 0.\overline{543} &= 0.543543\ldots && (2) \\
999 \cdot 0.\overline{543} &= 543 && (1)-(2) \\
0.\overline{543} &= \frac{543}{999} = \frac{181}{333}
\end{aligned}
$$

(d)
$$
\begin{aligned}
100 \cdot 0.1\overline{3} &= 13.3333\ldots && (1) \\
10 \cdot 0.1\overline{3} &= 1.3333\ldots && (2) \\
90 \cdot 0.1\overline{3} &= 12 && (1)-(2) \\
0.1\overline{3} &= \frac{12}{90} = \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

Hinweis: man könnte $0.1\overline{3}$ statt mit 100 und 10 auch mit 10 und 1 multiplizieren; dann wäre das Resultat auf der rechten Seite aber nicht mehr ganzzahlig und die zu lösende Gleichung würde so aussehen: $9 \cdot 0.1\overline{3} = 1.2$

(e)
$$
\begin{aligned}
1000 \cdot 0.25\overline{7} &= 257.7777\ldots && (1) \\
100 \cdot 0.25\overline{7} &= 25.7777\ldots && (2) \\
900 \cdot 0.25\overline{7} &= 232 && (1)-(2) \\
0.25\overline{7} &= \frac{232}{900} = \frac{58}{225}
\end{aligned}
$$

(f) $$\begin{aligned} 1000 \cdot 0.4\overline{81} &= 481.818181\ldots && (1)\\ 10 \cdot 0.4\overline{81} &= \quad 4.818181\ldots && (2)\\ 990 \cdot 0.4\overline{81} &= 477 && (1)-(2)\\ 0.4\overline{81} &= \frac{477}{990} = \frac{53}{110} \end{aligned}$$

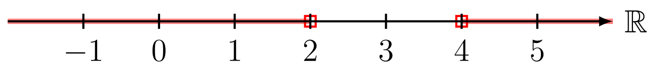
Aufgabe 1.100

$$s = (x-3) + \frac{1}{x-3} + \ldots \qquad (x \neq 3)$$

(a) s existiert genau dann, wenn $|q| < 1$

$$|q| = \left|\frac{1/(x-3)}{x-3}\right| = \left|\frac{1}{(x-3)^2}\right| = \frac{1}{(x-3)^2}$$

Somit konvergiert die Reihe, wenn $|x-3| > 1$ gilt.



(b) $$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{(x-3)}{1-\frac{1}{(x-3)^2}} = \frac{(x-3)}{\frac{(x-3)^2-1}{(x-3)^2}}$$

$$= \frac{(x-3)^3}{(x-3+1)(x-3-1)} = \frac{(x-3)^3}{(x-2)(x-4)}$$

(c) $$\begin{aligned} s &= x+2\\ \frac{(x-3)^3}{(x-2)(x-4)} &= x+2\\ (x-3)^3 &= (x+2)(x-2)(x-4)\\ x^3-9x^2+27x-27 &= (x^2-4)(x-4) = x^3-4x^2-4x+16\\ -9x^2+27x-27 &= -4x^2-4x+16\\ 0 &= 5x^2-31x+43\\ D &= \sqrt{31^2-4\cdot 5\cdot 43} = \sqrt{101}\\ x_1 &= \frac{31+\sqrt{101}}{10}\\ x_2 &= \frac{31-\sqrt{101}}{10} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.101

Gegeben: $a_1 = 0.1,\ s + 0.35 = q$

Gesucht: q

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot \frac{1}{1-q} + 0.35 &= q \\
0.1 \cdot \frac{1}{1-q} + 0.35 &= q \quad || \cdot (1-q) \\
0.1 + 0.35(1-q) &= q(1-q) \\
0.1 + 0.35 - 0.35q &= q - q^2 \\
q^2 - 1.35q + 0.45 &= 0 \\
q_1 &= \tfrac{3}{4} \\
q_2 &= \tfrac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.102

(a) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 2^{x^2-5} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2^x$

$2^x + 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + \ldots = 2^{x^2-5} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{a_1}{1-q} \\
2^{x^2-5} &= \frac{2^x}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^x}{\frac{1}{2}} \\
2^{x^2-5} &= 2 \cdot 2^x \\
2^{x^2-5} &= 2^{x+1} \\
x^2 - 5 &= x + 1 \\
x^2 - x - 6 &= 0 \\
(x+2)(x-3) &= 0 \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

(b) $3^x + 3^{x-2} + 3^{x-4} + \ldots = \frac{1}{8} \cdot 3^{x^2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3^x$

$3^x + 3^x \cdot 3^{-2} + 3^x \cdot 3^{-4} + \ldots = \frac{1}{8} \cdot 3^{x^2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{9}$

$$\begin{aligned}
s &= \frac{a_1}{1-q} \\
\frac{1}{8}\cdot 3^{x^2} &= \frac{3^x}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3^x}{\frac{8}{9}} \\
\frac{1}{8}\cdot 3^{x^2} &= \frac{9}{8}\cdot 2^x \\
3^{x^2} &= 3^2\cdot 3^x = 3^{x+2} \\
x^2 &= x+2 \\
x^2-x-2 &= 0 \\
(x+1)(x-2) &= 0 \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.103

$9 = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 9(1-q) \quad (1)$

$5 = a_1 + a_1 q = a_1(1+q) \quad (2)$

(1) in (2) einsetzen:

$5 = 9(1-q)(1+q)$

$\dfrac{5}{9} = 1-q^2$

$q^2 = \dfrac{4}{9}$

$q_1 = \dfrac{2}{3} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad a_1 = 3, a_2 = 2$

$q_2 = -\dfrac{2}{3} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad a_1 = 15, a_2 = -10$

Aufgabe 1.104

$\dfrac{a_1}{1-q} = 20 \quad (1)$

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots &= 100 \\
a_1^2 + (a_1\cdot q)^2 + (a_1\cdot q^2)^2 + \ldots &= 100 \\
a_1^2 + a_1^2\cdot q^2 + a_1^2\cdot q^4 + \ldots &= 100
\end{aligned}$$

$\dfrac{a_1^2}{1-q^2} = 100 \quad (2)$

(1) $\quad\Rightarrow\quad a_1 = 20(1-q)$ in (2) einsetzen:

$$\frac{\big(20(1-q)\big)^2}{1-q^2} = 100$$

$$\frac{400(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = 100$$

$$\frac{400(1-q)}{1+q} = 100$$

$$4(1-q) = 1+q$$

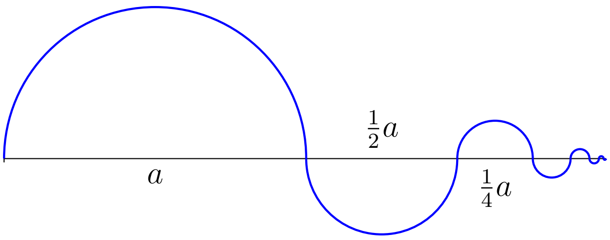
$$4-4q = 1+q$$

$$3 = 5q$$

$$q = \frac{3}{5} = 0.4$$

q in $a_1 = 20(1-q)$ einsetzen: $a_1 = 20(1-0.6) = 20 \cdot 0.4 = 8$

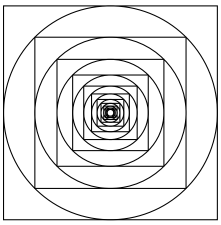
Aufgabe 1.105



$a_1 = \frac{\pi}{2} \cdot a$ und $q = \frac{1}{2}$ (pro memoria: $u = 2\pi r = \pi \cdot d$)

$$s = \frac{\frac{1}{2}\pi a}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\pi a}{\frac{1}{2}} = \pi a$$

Aufgabe 1.106



(a) Die Quadratumfänge bilden eine nichtabbrechende GR mit:

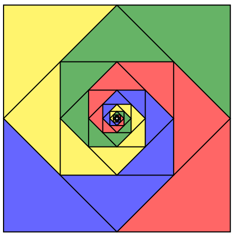
$$u_1 = 40\,\text{cm},\ q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_Q = 40\,\text{cm} \cdot \frac{1}{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 40\,\text{cm} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 40\big(2+\sqrt{2}\big)\,\text{cm}$$

(b) Die Kreisflächen bilden eine nichtabbrechende GR mit:

$$A_1 = 25\pi\,\mathrm{cm}^2,\ q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s_K = 50\pi\,\mathrm{cm}^2$$

Aufgabe 1.107



(a) Flächeninhalt des grössten Dreiecks: $A_1 = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8\text{cm}^2$

Flächeninhalt des nächstkleineren Dreiecks: $A_2 = \dfrac{A_1}{2} = 4\,\text{cm}^2$

$$q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = A_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 8 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 16\,\text{cm}^2$$

elegante Lösung: Aus Symmetriegründen passen 4 kongruente „Spiralen“ in das $64\,\text{cm}^2$ grosse Quadrat. Also muss eine der gesuchten Figuren $16\,\text{cm}^2$ gross sein.

(b) Folgt man, von der unteren linken Ecke aus, den Dreiecksseiten sowohl im Uhrzeiger- als auch im Gegenuhrzeigersinn, so erhält man zwei nichtabbrechende GR mit $a_1 = 4\,\text{cm}$ und $q = \sqrt{2}/2$. Daraus folgt:

$$u = 2 \cdot 4\,\text{cm} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\,\text{cm} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

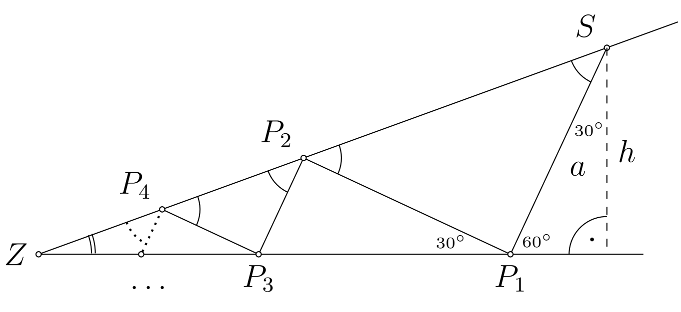
$$= 8\big(2+\sqrt{2}\big)\,\text{cm} \approx 27.31\,\text{cm}$$

Aufgabe 1.108

(a)

(b)

Aufgabe 1.109



(a) $h = a \cdot \cos(30°) = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$$\sin 15° = \frac{h}{|SZ|} \quad \Rightarrow \quad |SZ| = \frac{5\sqrt{3}}{\sin(15°)} \approx 33.46\,\text{cm}$$

(b) Die Dreiecke SP_1P_2, $P_2P_3P_4$, ... sind alle rechtwinklig gleichschenklig. Also ist

$$|SP_1| = |P_1P_2| = 10\,\mathrm{cm}$$

$$|P_2P_3| = |P_3P_4| = \frac{10\,\mathrm{cm}}{\sqrt{3}}$$

usw. $\quad\Rightarrow\quad$ GF mit $a_1 = 10\,\mathrm{cm}$ und $q = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned}|SP_1P_2P_3\ldots| &= 2\cdot 10\,\mathrm{cm}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 20\,\mathrm{cm}\cdot\frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\\ &= 20\,\mathrm{cm}\cdot\frac{3}{3-\sqrt{3}} \overset{3BF}{=} 20\,\mathrm{cm}\cdot\frac{3(3+\sqrt{3})}{6}\\ &= 10(3+\sqrt{3})\,\mathrm{cm} \approx 47.32\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

Damit lässt sich auch (a) exakt lösen:

$|SP_2| = 10\,\mathrm{cm}\cdot\sqrt{2}$; $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $|SZ| = 5\sqrt{2}(3+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 1.110

Aufgabe 1.111