Skizzieren von Parabeln

Übungen

asymptotisches Verhalten: Wie verhält sich $y = f(x)$ für grosse $|x|$?

Spezialfall: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (Polynom)

Klammere die Potenz mit dem grösstem Exponenten aus:

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

wenn $|x| \to \infty$: $\frac{a_{n-1}}{x} \to 0$, $\frac{a_{n-2}}{x} \to 0$, $\ldots$, $\frac{a_1}{x^{n-1}} \to 0$, $\frac{a_0}{x^n} \to 0$

Daraus folgt:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Um das asymptotische Verhalten von Polynomfunktionen zu bestimmen, genügt es, das Monom mit dem grössten Exponenten zu untersuchen.

Aufgabe 1

Erstelle eine qualitativ korrekte Skizze des Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

aufgrund ihrer Nullstellen und ihres asymptotischen Verhaltens.

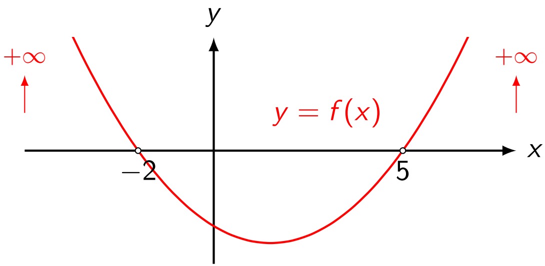
Aufgabe 1

$$f(x) = x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$$

Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$



Aufgabe 2

Erstelle eine qualitativ korrekte Skizze des Graphen der Funktion

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$

aufgrund ihrer Nullstellen und ihres asymptotischen Verhaltens.

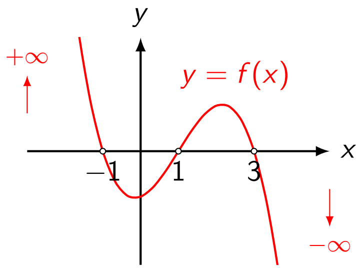
Aufgabe 2

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Nullstellen: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$$



Aufgabe 3

Erstelle eine qualitativ korrekte Skizze des Graphen der Funktion

$f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$

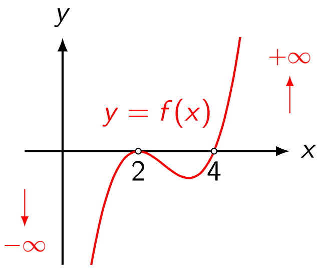
aufgrund ihrer Nullstellen und ihres asymptotischen Verhaltens.

Aufgabe 3

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$$

Nullstellen: $x_1 = x_2 = 2$ (doppelt!), $x_3 = 4$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$



Aufgabe 4

Erstelle eine qualitativ korrekte Skizze des Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

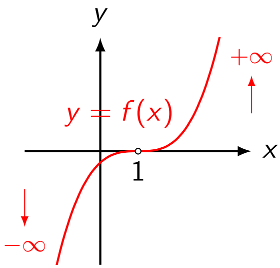
aufgrund ihrer Nullstellen und ihres asymptotischen Verhaltens.

Aufgabe 4

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Nullstellen: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (dreifach!)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$



Aufgabe 5

Erstelle eine qualitativ korrekte Skizze des Graphen der Funktion

$f(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2$

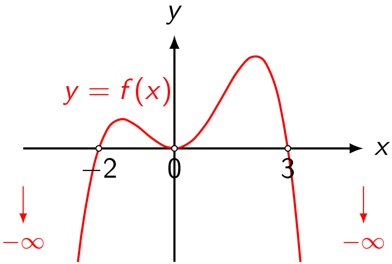
aufgrund ihrer Nullstellen und ihres asymptotischen Verhaltens.

Aufgabe 5

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2 = -x^2(x^2 - x - 6) = -x^2(x+2)(x-3)$$

Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 3$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x^4\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x^4\right) = -\infty$$



Die relative Höhe der Extrempunkte lässt sich aus den relativen Abständen zwischen den jeweiligen benachbarten Nullstellen ableiten. (→ Aufgabe 2)