Differenzialrechnung

Theorie (II) (L)

Version vom 21. April 2024

Inhaltsverzeichnis

Ist f eine Funktion, die in einer Umgebung U von $x_0 = 0$ unendlich oft differenzierbar ist, werden Koeffizienten a_0, a_1, a_3, $\ldots$, gesucht, so dass sich f für $x \in U$ durch eine Folge von Polynomen approximieren lässt:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Die Bestimmung der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots \\
f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 + 120a_6 x^3 + \ldots \\
f^{(4)}(x) &= 24a_4 + 120a_5 x + 360a_6 x^2 + 840a_7 x^3 + \ldots \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

$x = 0$ einsetzen und nach a_i auflösen:

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 && \Rightarrow && a_0 = f(0) \\
f'(0) &= a_1 && \Rightarrow && a_1 = f'(0) \\
f''(0) &= 2a_2 && \Rightarrow && a_2 = f''(0)/2 \\
f'''(0) &= 6a_3 && \Rightarrow && a_3 = f'''(0)/6 \\
f^{(4)}(0) &= 24a_3 && \Rightarrow && a_4 = f^{(4)}(0)/24 \\
\ldots &= \ldots \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Die Maclaurin-Reihe (Colin Maclaurin 1698–1746)

Ist f eine in der Umgebung von $x = 0$ unendlich oft differenzierbare Funktion, so gilt:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \ldots$$

Drückt man die Faktoren

$$1, 1, 2, 6, 24, \ldots$$

durch die Fakultäten

$$0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$$

aus, erhält man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Beispiel 1

Bestimme die Maclaurin-Reihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$.

- $a_0 = \dfrac{f(0)}{0!} = \dfrac{e^0}{1} = 1$
- $a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!} = \dfrac{e^0}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$
- $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!} = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{e^0}{6} = \dfrac{1}{6}$
- usw.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \dots$

Die Taylor-Reihe

Verwendet man als Ausgangsstelle für die Reihenentwicklung nicht 0 sondern eine beliebige Stelle x_0,

so erhält man durch eine Variablentransformation aus der Maclaurin-Reihe die *Taylor-Reihe* von f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

(Brook Taylor, britischer Mathematiker, 1685–1731)

Beispiel 2

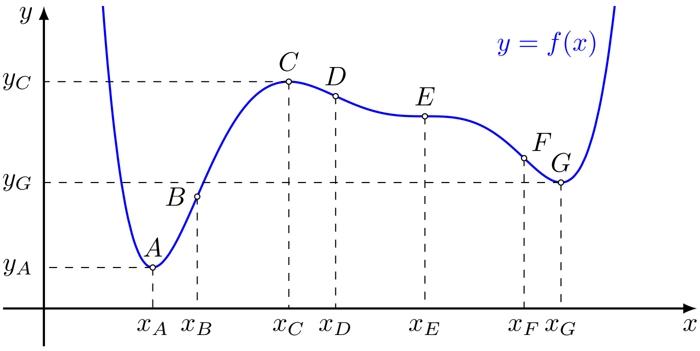
Bestimme die Taylorreihe von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x) && \Rightarrow & f(1) &= 0 \\
f'(x) &= 1/x = x^{-1} && \Rightarrow & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= -x^{-2} && \Rightarrow & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= 2x^{-3} && \Rightarrow & f'''(1) &= 2 \\
f^{(4)}(x) &= -6x^{-3} && \Rightarrow & f^{(4)}(1) &= -6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \frac{0}{1} + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4 + \dots \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots
\end{aligned}$$

11 Extrem- und Wendepunkte

11.1 Begriffe



Extrempunkte: A (Tiefpunkt), C (Hochpunkt), G (Tiefpunkt)

Wendepunkte: B, D, E (Terrassen- oder Sattelpunkt), F

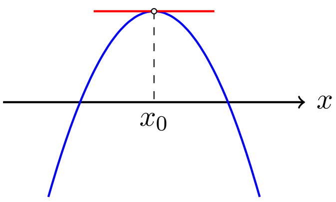
Extrema: y_A (globales Minimum), y_C (lokales Maximum), x_G (lokales Mininmum)

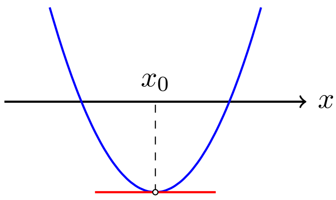
Extremstellen: x_A, x_C, x_G

Wendestellen: x_B, x_D, x_E, x_F

11.2 Extrempunkte

Ein notwendiges Kriterium für Extremstellen

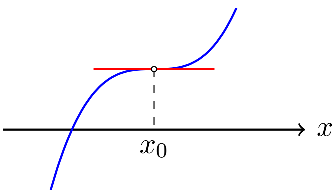




x_0 ist eine Extremstelle $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Der Spielverderber

$f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad x_0$ ist Extremstelle



x_0 ist *Terrassenstelle* (Synonym: *Sattelstelle*)

Hinreichende Kriterien für Extremstellen

Gilt $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 entweder ...

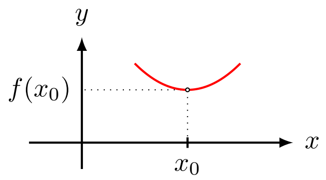
- eine Hochstelle,
- eine Tiefstelle oder
- eine Terrassenstelle.

Wie findet man heraus, was vorliegt?

Betrachte die Taylorreihe von f:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{0} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{Parabel 2. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{vernachlässigbar}} + \dots$$

ist $x \approx x_0$, so ist $(x - x_0)^3$ gegenüber $(x - x_0)^2$ vernachlässigbar.

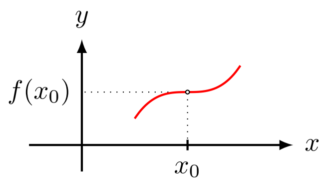


$f''(x_0) > 0$: Parabel nach oben offen; x_0 ist Minimalstelle

$f''(x_0) < 0$: Parabel nach unten offen; x_0 ist Maximalstelle

Gilt auch $f''(x_0) = 0$ verschwindet der dritte Summand und der vierte wird wichtig.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{0} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{0} + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{Parabel 3. Ordnung (*)}} + \dots$$



$f'''(x_0) > 0$: $(*)$ ändert Krümmung $(-/+)$; x_0 ist Terrassenstelle

$f'''(x_0) < 0$: $(*)$ ändert Krümmung $(+/-)$; x_0 ist Terrassenstelle

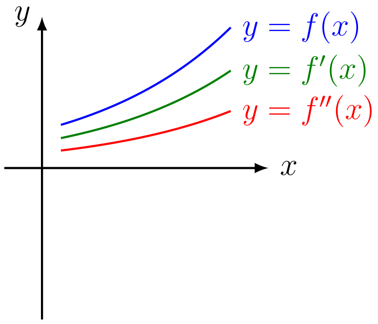
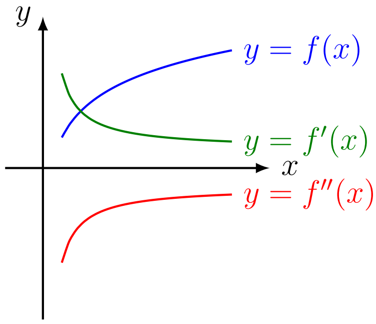
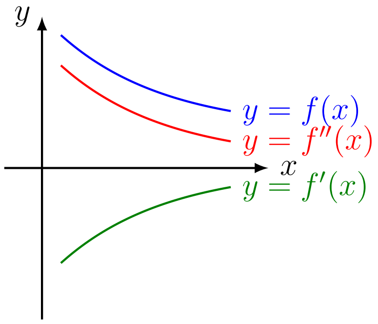
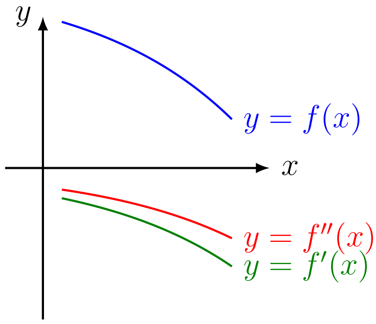
Gilt auch $f'''(x_0) = 0$ verschwindet der vierte Summand und der fünfte wird wichtig. In diesem Fall haben wir wieder dieselbe Situation wie bei der Parabel 2. Ordnung.

Bemerkung

Eine ganzrationale Funktion von Grad n hat nach einmaligem Ableiten den Grad $n - 1$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine solche Funktion höchstens $n - 1$ Nullstellen und somit auch höchstens $n - 1$ Extremstellen.

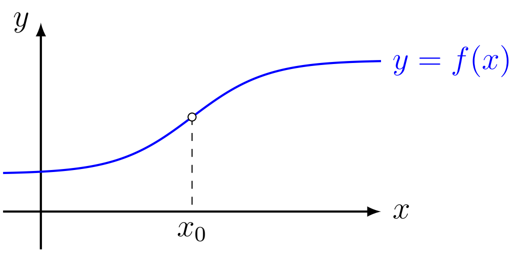
11.3 Die geometrische Deutung der 2. Ableitung

Überblick

	$f''(x) > 0$ (Linkskurve)	$f''(x) < 0$ (Rechtskurve)
$f'(x) > 0$		
$f'(x) < 0$		

11.4 Wendepunkte

Wechselt der Graph von f an einer Stelle x_0 von einer Links- in eine Rechtskurve oder von einer Rechts- in eine Linkskurve, so wird x_0 *Wendestelle* und $P(x_0, y_0)$ *Wendepunkt* genannt.



Notwendige Bedingung für Wendestellen

x_0 Wendestelle $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Da die Wendestellen die Extremstellen der 1. Ableitung sind, können wir die Wendestellen analog zu den Extremstellen berechnen, indem wir in der Theorie der Extremstellen f' durch f'', f'' durch f''' usw. ersetzen.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen

f sei eine auf dem offenen Intervall I n-mal differenzierbare Funktion und für $x_0 \in I$ gelte

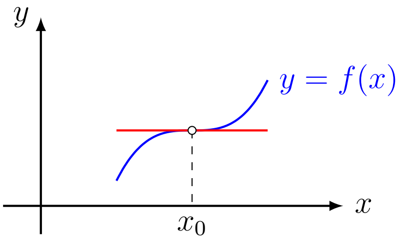
$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{aber} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Falls n ungerade ist, so ist x_0 eine Wendestelle und es gilt:

- $f^{(n)}(x_0) < 0$: Graph wechselt von Links- zur Rechtskrümmung
- $f^{(n)}(x_0) > 0$: Graph wechselt von Rechts- zur Linkskrümmung

Terrassenpunkte

Eine *Wendetangente* ist eine Tangente in einem Wendepunkt. Ein *Terrassenpunkt* ist ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.



Bemerkung

Eine ganzrationale Funktion von Grad n hat nach zweimaligem Ableiten den Grad $n-2$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine solche Funktion höchstens $n-2$ Nullstellen und somit auch höchstens $n-2$ Wendestellen.

12 Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Beispiel 12.1

Untersuche die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(a) Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

(b) Symmetrie

Vermutung: f ist gerade (symmetrisch zur y-Achse)

Beweis: $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ [nur gerade Exponenten]

(c) Asymptotisches Verhalten

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^4) = +\infty$ oder via Symmetrie

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$x^2(x^2 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{2}$

$y_0 = f(0) = 0$

(e) Ableitungen

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f'''(x) = 24x$

(f) Extrempunkte

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$

Kandidaten: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \mathrm{HoP}(0, 0)$

$f''(1) = 8 > 0 \Rightarrow \mathrm{TiP}_1(1, -1)$

$\mathrm{TiP}_2(-1, -1)$ [Symmetrie]

(g) Wendepunkte

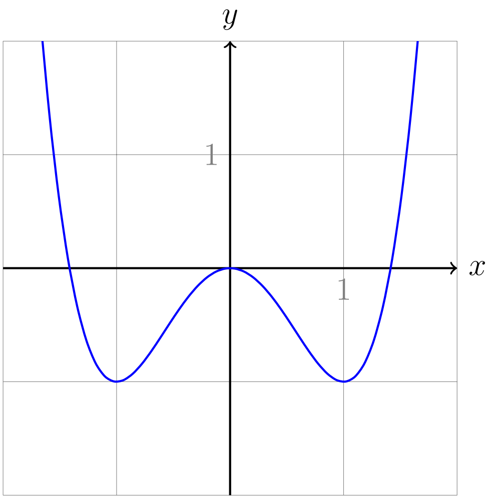
$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

Kandidaten: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \Rightarrow \mathrm{WeP}_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ (RKLK)

Symmetrie: $\mathrm{WeP}_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ (LKRK)

(h) Graph



Beispiel 12.2

Untersuche die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 3x^2 - x^3$.

(a) Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

(b) Symmetrie

G_f ist weder symmetrisch zur y-Achse noch symmetrisch zum Ursprung, da weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$

(c) Asymptotisches Verhalten

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-x^3) = -\infty$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2(3-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 0$

(e) Ableitungen

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$f''(x) = 6 - 6x$

$f'''(x) = -6$

(f) Extrempunkte

$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(2-x) = 0$

Kandidaten: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(0,0)$

$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(2,4)$

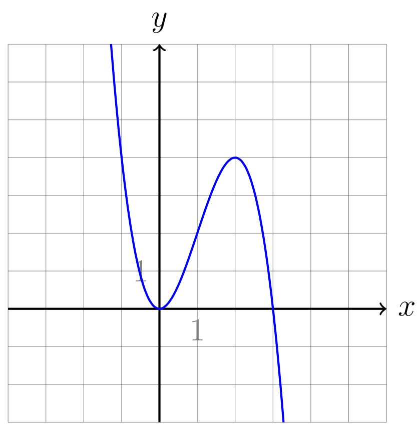
(g) Wendepunkt

$f''(x) = 6 - 6x = 0$

Kandidat: $x = 1$

$f'''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{WeP}(1,2)$ (LKRK)

(h) Graph



Beispiel 12.3

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{15}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 1$.

(a) Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

(b) Symmetrie

weder gerade noch ungerade

(c) Asymptotisches Verhalten

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{8}x^5 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{8}x^5 = +\infty$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

$f(x) = 0 \overset{\text{TR}}{\Rightarrow} x \approx -0.64$

$f(0) = 1$

(e) Ableitungen

$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2$

$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x$

$f'''(x) = \frac{45}{2}x^2 - 45x + 15$

(f) Extrempunkte

$f'(x) = \frac{15}{8}x^4 - \frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 = 0$

$\frac{15}{8}x^2(x^2 - 4x + 4) = \frac{15}{8}x^2(x-2)^2 = 0$

Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$f''(0) = 0$ (weiter testen)

$f'''(0) = 15 > 0$ ($\rightarrow$ Wendepunkte)

$f''(2) = 0$ (weiter testen)

$f'''(2) = 15 > 0$ ($\rightarrow$ Wendepunkte)

(g) Wendepunkte

$f''(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 15x = 0$

$\frac{15}{2}x(x^2 - 3x + 2) = \frac{15}{2}x(x-1)(x-2) = 0$

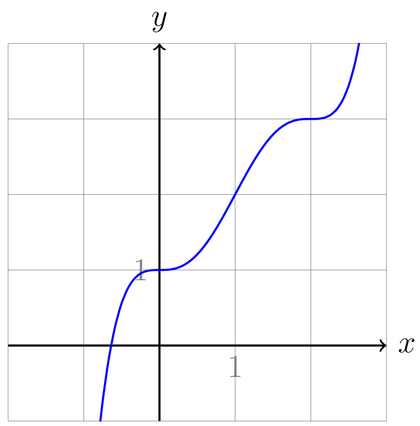
Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

TeP$(0, 1)$ (siehe oben, RKLK)

$f'''(1) = -7.5 < 0 \Rightarrow$ WeP$(1, 2)$ (LKRK)

TeP$(2, 3)$ (siehe oben, RKLK)

(h) Graph



13 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Beispiel 13.1

f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 und besitzt ...

- bei $x = -2$ eine Nullstelle,
- bei $x = 1$ eine Extremstelle,
- im Punkt $P(0, -8)$ eine Wendetangente mit der Steigung 2.

Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Nullstelle: $f(-2) = 0$ $\qquad 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$

Extremstelle: $f'(1) = 0$ $\qquad 4a + 3b + 2c + d = 0$

Punkt P: $f(0) = -8$ $\qquad e = -8$

WP: $f''(0) = 0$ $\qquad 2c = 0$

WP: $f'(0) = 2$ $\qquad d = 2$

PlySmlt2/SimultEqnSolver: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x - 8$

Beispiel 13.2

Welches zur y-Achse symmetrische Polynom 4. Grades geht durch $A(0, 2)$ und hat in $B(1, 0)$ ein Minimum?

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$A(0, 2) \in G_f$:
$f(0) = 2$ $\qquad c = 2$

$B(1, 0) \in G_f$:
$f(1) = 0$ $\qquad a + b + c = 0$

$x = 1$ ist Extremstelle:
$f'(1) = 0$ $\qquad 4a + 2b = 0$

PlySmlt2/SimultEqnSolver: $\qquad f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

Beispiel 13.3

Ein Polynom 3. Grades hat dieselben Nullstellen wie $g(x) = 2x - 12x^3$. Beide Graphen stehen im Ursprung senkrecht aufeinander. Bestimme die Funktionsgleichung des unbekannten Polynoms.

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

g: $2x(1 - 6x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}},\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$f(0) = 0$ $\qquad d = 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0$ $\qquad \frac{1}{6\sqrt{6}}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{\sqrt{6}}c + d = 0$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0$ $\qquad -\frac{1}{6\sqrt{6}}a + \frac{1}{6}b - \frac{1}{\sqrt{6}}c + d = 0$

$g'(x) = 2 - 36x^2$

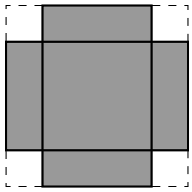
$f'(0) \cdot g'(0) = -1$ $\qquad c \cdot 2 = -1$ $\qquad c = -\frac{1}{2}$

PlySmlt2/SimultEqnSolver: $\qquad f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x$

14 Extremwertaufgaben

Beispiel 14.1 (Offene Schachtel)

Von einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge $l = 10$ cm werden an allen Ecken Quadrate mit gleicher Seitenlänge ausgeschnitten.



Wie gross ist die Seitenlänge dieser Quadrate zu wählen, damit der Rest eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen ergibt? Wie gross ist dieses Volumen?

Zielfunktion

$V(l, b, h) = l \cdot b \cdot h$

Nebenbedingung(en)

- $l = b = 10 - 2x$
- $h = x$
- $0 \text{ cm} < x < 5 \text{ cm}$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

$V(x) = (10 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$

Extremum bestimmen

$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 0$

$V''(x) = 24x - 80$

$12x^2 - 80x + 100 = 0$

$$x_1 = \tfrac{5}{3}$$

$$x_2 = 5 \quad \text{(sinnlos)}$$

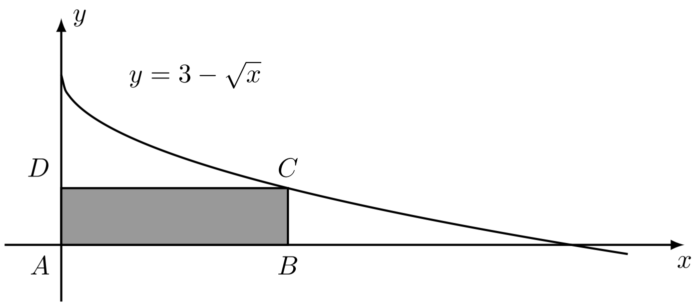
$V''(\frac{5}{3}) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 = -40 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$ ist Maximalstelle

Lösung

$V_{\max} = V(\frac{5}{3}) = \frac{2000}{27} \approx 74.07 \text{ cm}^3$

Beispiel 14.2

Ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind, hat eine Ecke in $A(0,0)$. Die Ecke $C(x,y)$ liegt im I. Quadranten auf der Kurve $f(x) = 3 - \sqrt{x}$ und soll so bestimmt werden, dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird.



Zielfunktion

$A(x,y) = x\,y$

Nebenbedingung

$y = 3 - \sqrt{x}$, wobei $0 < x < 9$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

$A(x) = x\big(3 - \sqrt{x}\big) = 3x - x\sqrt{x} = 3x - x^{3/2}$

Extremum bestimmen

- $A'(x) = 3 - \frac{3}{2}\,x^{1/2}$
- $A''(x) = -\frac{3}{4}\,x^{-1/2}$

$$0 = 3 - \frac{3}{2}\,x^{1/2}$$

$$\frac{3}{2}\,x^{1/2} = 3$$

$$x^{1/2} = 2$$

$$x = 4$$

$A''(4) = -\dfrac{3}{4} \cdot 4^{-1/2} = -\dfrac{3}{8} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$ ist ein lokales Maximum

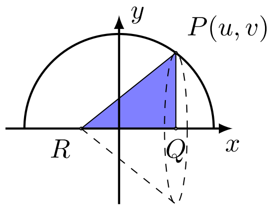
Lösung

$y = 3 - \sqrt{4} = 1$

$A(4) = 3 \cdot 4 - 4^{3/2} = 12 - 8 = 4\,\mathrm{FE}$

Beispiel 14.3

Auf dem Halbkreis mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ wird ein Punkt $P(u, v)$ gewählt. Lässt man das rechtwinklige Dreieck $P(u, v)$, $Q(u, 0)$, $R(-1, 0)$ um die x-Achse drehen, entsteht ein gerader Kreiskegel.



Bei welcher x-Koordinate u hat der Kreiskegel maximales Volumen und wie gross ist dieses?

Zielfunktion

$V(x, y) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot y^2 \cdot 2 \cdot x$

Nebenbedingung

$y = \sqrt{8 - x^2}$ wobei $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(8 - x^2) \cdot (x + 1) = \frac{\pi}{3}(-x^3 - x^2 + 8x + 1)$$

Extrema bestimmen

$V'(x) = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 2x + 8)$

$V''(x) = \frac{\pi}{3}(-6x - 2)$

$$-3x^2 - 2x + 8 = 0$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$x_1 = -2 \Rightarrow f''(2) = \frac{10\pi}{3} > 0$ Tiefstelle

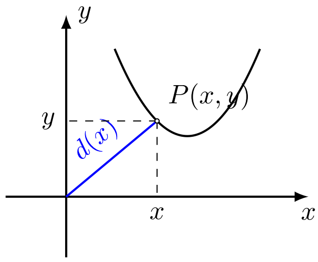
$x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow f''(\frac{4}{3}) = -\frac{10\pi}{3} < 0$ Hochstelle

Lösung

$V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{392}{81}\pi\,\mathrm{VE} \approx 15.20\,\mathrm{VE}$

Beispiel 14.4

Welcher Punkt $P(x, y)$ der Kurve $k\colon y = x^2 - 4\,x + 5$ hat die kürzeste Entfernung vom Ursprung?



Zielfunktion

$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Distanz vom Ursprung)

Nebenbedingung

$y = x^2 - 4x + 5$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 4x + 5)^2}$

$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)}$

$d(x) = \sqrt{x^2 + x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 16x^2 - 40x + 25}$

$d(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 40x + 25}$

Extrema bestimmen

Wegen $d(x) > 0$ und der Monotonie von $d^2(x)$ können wir
$d^2(x) = D(x) = x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 40x + 25$
statt $d(x)$ differenzieren:

$D'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 54x - 40$

$D''(x) = 12x^2 - 48x + 54$

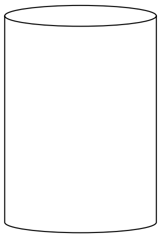
$4x^3 - 24x^2 + 54x - 40 = 0$
TI-84+: PolySmlt2/Poly Root Finder/3/... /SOLVE/STOx/L1
$x_1 = 1.4464$
$D(1.4464)'' = 9.67 > 0$ (x_1 ist Minimalstelle)

Lösung

$f(x_1) = 1.31 \quad \Rightarrow \quad P(1.45, 1.31)$

Beispiel 14.5

Für die Oberfläche einer zylinderförmige Büchse mit einem Volumen von $1\,\ell$ soll möglichst wenig Material verbraucht werden. Wie gross müssen Höhe h und Radius r gewählt werden?



Zielfunktion

$S(r,h) = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,h$

Nebenbedingung

$V = 1\,\ell = 1\,\mathrm{dm}^3 = \pi\,r^2\,h \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{1}{\pi\,r^2}$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

$S(r) = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,\dfrac{1}{\pi\,r^2} = 2\,\pi\,r^2 + \dfrac{2}{r}$

Extrema bestimmen

$S'(r) = 4\,\pi\,r - \dfrac{2}{r^2}$

$S''(r) = 4\,\pi + \dfrac{4}{r^3}$

$$\begin{aligned} 4\,\pi\,r - \frac{2}{r^2} &= 0 \\ 4\,\pi\,r^3 - 2 &= 0 \\ r^3 &= \frac{1}{2\,\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \end{aligned}$$

$r \approx 0.542\,\mathrm{dm}$

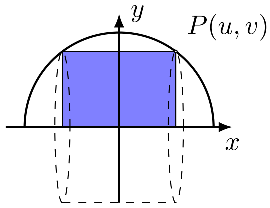
$S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\,\pi}}\right) = 4\pi + \dfrac{4}{1/2\pi} = 12\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\,\pi}}$ ist lokales Minimum

Lösung

$h = \dfrac{1}{\pi\,r^2} \approx 1.084$

Beispiel 14.6

Dem Halbkreis mit der Gleichung $y = \sqrt{12 - x^2}$ wird, wie in der Abbildung dargestellt, ein Rechteck einbeschrieben.



Dreht man dieses Rechteck um die x-Achse, so entsteht ein Zylinder. Wie gross kann das Volumen dieses Zylinders maximal werden?

Zielfunktion

$V(x, y) = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot y^2 \cdot 2 \cdot x$

Nebenbedingung

$y = \sqrt{12 - x^2} \Rightarrow y^2 = (12 - x^2)$
mit $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

$V(x) = \pi(12 - x^2) \cdot 2x = 24\pi x - 2\pi x^3$

Extrema bestimmen

$V'(x) = 24\pi - 6\pi x^2 = 6\pi(4 - x^2)$

$V''(x) = -12\pi x$

$x_1 = 2 \Rightarrow f''(2) = -24\pi < 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ist Hochstelle

$x_2 = -2 \Rightarrow f''(-2) = 24\pi > 0 \Rightarrow x_2 = -2$ ist Tiefstelle (Symmetrie!)

Lösung

$V(2) = 48\pi - 16\pi = 32\pi$ VE

Funktionenscharen

Aufgabe 1

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Gesucht: $f_t(x)$ für $t = -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$f_{-1}(x) = x^2 - x - 1$

$f_0(x) = x^2$

$f_1(x) = x^2 + x + 1$

$f_2(x) = x^2 + 2x + 2$

Aufgabe 2

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Gesucht: $f'_t(x)$ für $t = -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$f'_t(x) = 2x + t$

$f'_{-1}(x) = 2x - 1$

$f'_0(x) = 2x$

$f'_1(x) = 2x + 1$

$f'_2(x) = 2x + 2$

Aufgabe 3

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

$$\begin{aligned} f_t(2) &= 1 \\ 4 + t \cdot 2 + t &= 1 \\ 4 + 3t &= 1 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Für welches t gilt $f_t'(2) = 1$?

$f_t'(x) = 2x + t$

$$\begin{aligned} f_t'(2) &= 1 \\ 2 \cdot 2 + t &= 1 \\ 4 + t &= 1 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Bestimme die Nullstellen von $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t.

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ x^2 + tx + t &= 0 \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac = t^2 - 4t$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 4t}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 4t}}{2}$$

Aufgabe 6

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t?

$f_t'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = -\frac{t}{2}$

Test: $f_t''(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkte

x_e in $f_t(x)$ einsetzen:

$$y = f_t\left(-\frac{t}{2}\right) = \left(-\frac{t}{2}\right)^2 + t\left(-\frac{t}{2}\right) + t = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + t = -\frac{t^2}{4} + t$$

$$\Rightarrow T\left(-\frac{t}{2}, -\frac{t^2}{4} + t\right)$$

t aus den Koordinaten von

$$T\Bigg(\underbrace{-\frac{t}{2}}_{x},\underbrace{-\frac{t^2}{4}+t}_{y}\Bigg)$$

eliminieren:

$$-\frac{t}{2}=x \quad\Rightarrow\quad t=-2x \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{4x^2}{4}-2x=-x^2-2x$$

Kurve, auf der alle Extrempunkte liegen: $k\colon y=-x^2-2x$

Aufgabe 7

Gegeben: $f_t(x)=x^2+tx+t \qquad (t\in\mathbb{R})$

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

Suche x, so dass $f_t(x)=f_s(x)$ für $s\neq t$

$$\begin{aligned}
f_t(x)&=f_s(x) && \\
x^2+tx+t&=x^2+sx+s && ||-x^2\\
tx+t&=sx+s && ||-sx\ -s\\
tx-sx+t-s&=0 && x \text{ ausklammern}\\
(t-s)x+(t-s)&=0 && ||:(t-s)\\
x+1&=0 && \\
x&=-1 &&
\end{aligned}$$

Einsetzen: $y=f_t(-1)=(-1)^2+t\cdot(-1)+t=1-t+t=1$

gemeinsamer Punkt: $P(-1,1)$

15 Gebrochenrationale Funktionen

Begriffe

Eine *gebrochenrationale Funktion* ist ein Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{a_m x^n + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei

- $p(x)$ ein *Zählerpolynom* vom Grad m ist,
- $q(x)$ ein *Nennerpolynom* vom Grad n ist.

Weitere Bezeichnungen und Sonderfälle:

$n = 0$: Der Nenner $q_0(x) = b_0$ ist konstant und $f(x)$ ist eine *ganzrationale Funktion.*

$m \geq n$: f ist eine *unecht gebrochenrationale Funktion.*

$m < n$: f ist eine *echt gebrochenrationale Funktion.*

15.1 Polynomdivision

Ein Verfahren, um eine unecht gebrochenrationale Funktion als Summe aus einer ganzrationalen- und einer echt gebrochenrationalen Funktion darzustellen. (vgl. $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$)

$$\begin{array}{llllll}
(2x^2 + x + 1) & : & (2x-1) & = & x + 1 + \dfrac{2}{2x-1} \\
-\underline{(2x^2 - x)} & & & & \\
\quad 2x + 1 & & & & \\
\quad -\underline{(2x - 1)} & & & & \\
\qquad 2 & & & &
\end{array}$$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R} \setminus \{x \colon q(x) = 0\}$
Menge aller reellen Zahlen, die *nicht* Nullstellen des Nennerpolynoms sind.

Beispiel 15.1

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x-5}{(x-3)(x-4)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3, 4\} \text{ (Definitionslücken)}$$

Nullstellen

Eine *Nullstelle* von f ist eine Nullstelle von $p(x)$, die nicht auch Nullstelle von $q(x)$ ist.

Beispiel 15.2

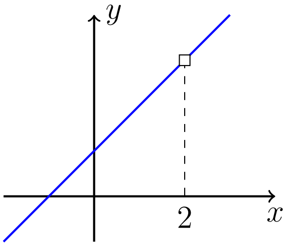
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x - 9} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)^2} \Rightarrow N = \{-1\}$$

Hebbare Definitionslücken

Eine Definitionslücke, die sich als Faktor aus dem Nenner wegkürzen lässt, wird *hebbar* genannt.

Beispiel 15.3

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = x+1, \text{ falls } x \neq 2 \Rightarrow x = 2 \text{ ist hebbare Definitionslücke.}$$



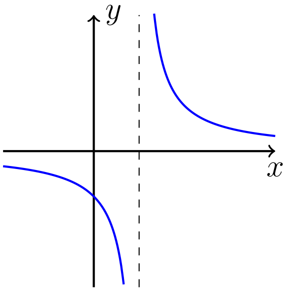
Polstelle

Eine Definitionslücke, die sich als Faktor nicht aus dem Nenner wegkürzen lässt, wird *Polstelle* genannt.

Ist der Grad des gekürzten Linearfaktors ungerade, so ist es eine Polstelle *mit Vorzeichenwechsel (mVzw)*, sonst eine Polstelle *ohne Vorzeichenwechsel (oVzw)*.

Beispiel 15.4

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

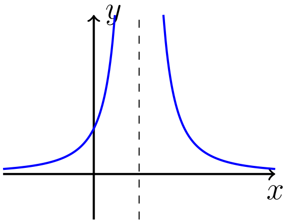


$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$f(x)$ besitzt bei $x_0 = 1$ einen *Pol mit Vorzeichenwechsel.*

Beispiel 15.5

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$



$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty \quad$ und $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$f(x)$ hat bei $x_0 = 1$ einen *Pol ohne Vorzeichenwechsel.*

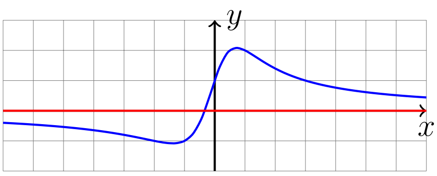
Asymptotisches Verhalten

Welchen Grenzwert haben $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

Beispiel 15.6

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \qquad \text{(Kurzschreibweise)}$$

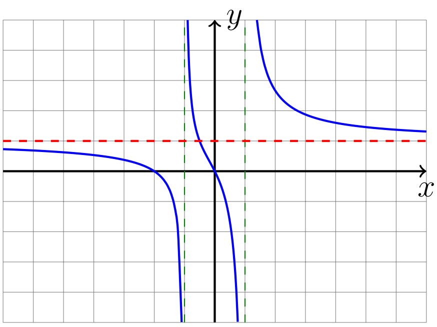


(horizontale) Asymptote: $y = 0$ (x-Achse)

Beispiel 15.7

$f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1} = 1 + \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ (Polynomdivision)

$\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 1 \qquad$ Asymptote: $y = 1$

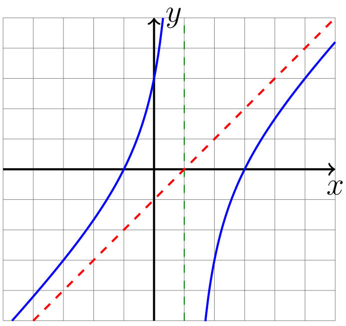


Beispiel 15.8

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = x - 1 - \dfrac{4}{x - 1}$ (Polynomdivision)

Asymptote: $a(x) = x - 1$

Für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx a(x)$ bzw. $\lim\limits_{|x| \to \infty} [f(x) - a(x)] = 0$



15.2 Kurvendiskussion

Beispiel 15.9

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)}$$

- *Definitionsbereich:*

  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- *Symmetrie:*

  Weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

- *Nullstelle(n):*

  $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

- *Ordinatenabschnitt:*

  $f(0) = \dfrac{0-2}{0-1} = 2$

- *Verhalten an den Definitionslücken:*

  $x = 1$ (Pol mit Vorzeichenwechsel):

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \; \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

  $x = -1$ (Pol mit Vorzeichenwechsel):

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

- *Verhalten im Unendlichen (asymtptotisches Verhalten)*

  $\lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{x-2}{x^2-1} = 0$

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x-2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{x^2 - (2x^2 + 4x)}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(-2x+4)(x^2-1)^2 - (-x^2+4x-1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \text{\tiny (Kettenregel)} \\
&= \frac{(-2x+4)(x^2-1) - (-x^2+4x-1)4x}{(x^2-1)^3} \\
&= \frac{-2x^3 + 2x + 4x^2 - 4 + 4x^3 - 16x^2 + 4x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{2x^3 - 12x^2 + 6x - 4}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

- *Extrempunkte:*

  $f'(x) = -x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 3.73\ x_2 \approx 0.27,$

  Test:

  $f''(3.73) \approx -0.02 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HoP}(3.73, 0.13)$

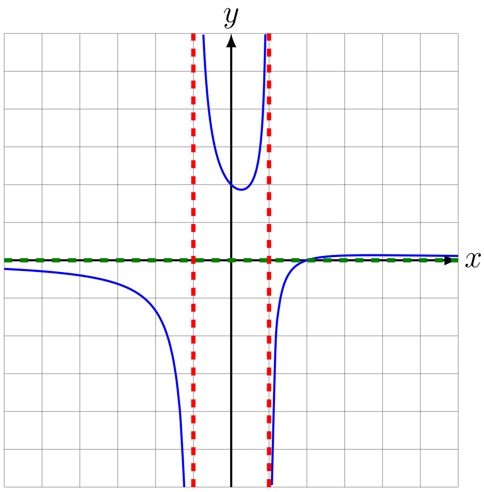
  $f''(0.27) \approx 4.02 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TiP}(0.27, 1.87)$

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten $f''(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 5.52$

  $W(5.52, 0.12)$?

- *Graph:*



16 Diskussion transzendenter Funktionen

Beispiel 16.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = (-x-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \neq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nicht ordinatensymmetrisch

$-f(x) = (-x+2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nicht ursprungssymmetrisch

(c) Asymptotisches Verhalten:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

(d) Ordinatenabschnitt und Nullstellen:

$$\begin{aligned} (x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2/2} &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$f(0) = (0-2) \cdot \mathrm{e}^0 = -2$

(e) Ableitungen:

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x-2) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = (x^2 - 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x^2 - 2x + 1) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (3x^2 - 4x + 3) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\ &= (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 3)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

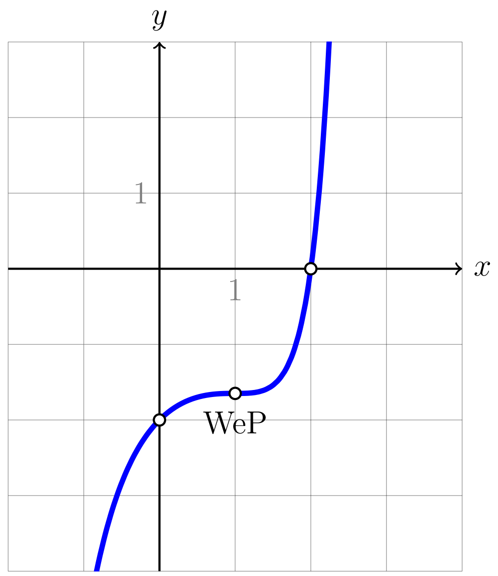
(f) Extrempunkte:

- Kandidaten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ x_1 = x_2 &= 1 \end{aligned}$$
- Test: $f''(1) = (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 1} = 0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ unklar

(g) Wendepunkte:

- Kandidaten:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (x^3 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$
- Test: $$\begin{aligned} f'''(1) &= (x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 3) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 1} \\ &= (1 - 2 + 6 - 6 + 3) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned}$$
- y-Koordinate: $f(1) = (1-2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -1.65 \Rightarrow \mathrm{WeP}(1|-1.65)$

(h) Graph:



Beispiel 16.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(2x - x^2)$.

(a) *Definitionsbereich:*

$$2x - x^2 > 0$$
$$x(2 - x) > 0$$

$D = (0, 2)$ [Das ist ein offenes Intervall; kein Punkt.]

(b) *Symmetrie:*

Die innere Funktion $2x - x^2$ ist weder gerade noch ungerade also auch $f(x)$ nicht.

(c) Asymptoten:

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \ln(2x - x^2) &= 0 \\ 2x - x^2 &= 1 \\ 0 &= x^2 - 2x + 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Der Ordinatenabschnitt $f(0)$ ist nicht definiert

(e) Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2x-x^2}\cdot(2-2x) = \frac{2x-2}{x^2-2x} = \frac{2x-2}{x^2-2x}\\
f''(x) &= \frac{2(x^2-2x)-(2x-2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{2x^2-4x-(4x^2-8x+4)}{(x^2-2x)^2}\\
&= \frac{-2x^2+4x-4}{(x^2-2x)^2} = -\frac{2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2}\\
f'''(x) &= -\frac{(4x-4)\cdot(x^2-2x)^2-(2x^2-4x+4)\cdot 2(x^2-2x)^1(2x-2)}{(x^2-2x)^4}\\
&= -\frac{(4x-4)\cdot(x^2-2x)-(2x^2-4x+4)\cdot 2(2x-2)}{(x^2-2x)^3}\\
&= -\frac{4(x-1)\cdot(x^2-2x)-(2x^2-4x+4)\cdot 4(x-1)}{(x^2-2x)^3}\\
&= -\frac{4(x-1)\big[(x^2-2x)-(2x^2-4x+4)\big]}{(x^2-2x)^3}\\
&= -\frac{4(x-1)\big[-x^2+2x-4\big]}{(x^2-2x)^3} = \frac{4(x-1)\big(x^2-2x+4\big)}{(x^2-2x)^3}
\end{aligned}
$$

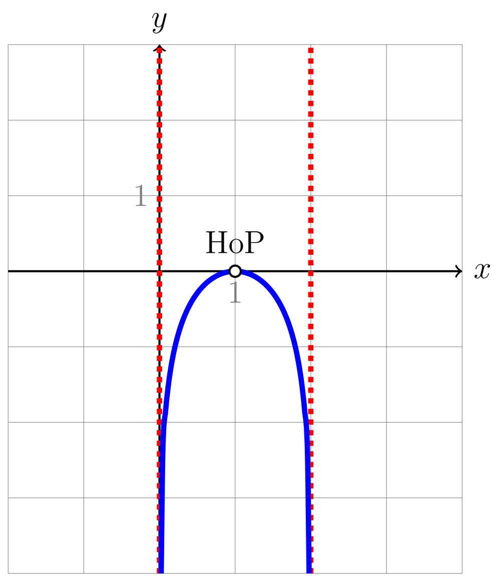
(f) Extrempunkte:

- Kandidaten:
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0\\
\frac{2x-2}{x^2-2x} &= 0\\
2x-2 &= 0\\
x &= 1
\end{aligned}
$$
- Test: $f''(1) = -\frac{2-4+4}{(1-2)^2} = -\frac{2}{1} = -2 < 0 \quad\Rightarrow\quad x=1$ ist Hochstelle
- y-Koordinate:
  $y = f(1) = \ln(2\cdot 1-1) = \ln(1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{HoP}(1|0)$

(g) Wendepunkte:

- Kandidaten:
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0\\
-2x^2+4x-4 &= 0
\end{aligned}
$$
  keine Lösung $\quad\Rightarrow\quad$ keine Wendepunkte

(h) Graph:


y
1
HoP
1
x