
Differenzialrechnung

Theorie (I)

Version vom 21. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Grenzwerte von Folgen	4
2	Grenzwerte von Funktionen	10
2.1	Stetigkeit	15
3	Der Differenzialquotient	16
4	Die Ableitungsfunktion	21
4.1	Elementare Funktionen	21
4.2	Der Differenzialoperator	27
4.3	Zusammenfassung	27
5	Ableitungsregeln	28
5.1	Summenregel	28
5.2	konstante Faktoren	28
5.3	Produktregel	29
5.4	Ableitung des Kehrwerts	30
5.5	Quotientenregel	30
5.6	Kettenregel	31
5.7	Die Ableitung der Umkehrfunktion	33
5.8	Höhere Ableitungen	34
5.9	Implizite Differentiation (PAM)	35
6	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	38
6.1	Definitionslücken	38
6.2	Stetigkeit	39
6.3	Differenzierbarkeit	41
7	Monotonie	42
8	Symmetrie	46
9	Asymptotisches Verhalten	47
9.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	47
9.2	Gebrochenrationale Funktionen	48
9.3	Exponentialfunktionen	49
9.4	Logarithmusfunktionen	49
9.5	Trigonometrische Funktionen	49

10 Nullstellen	51
10.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen	51
10.2 Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen	53
10.3 Nullstellen von Exponential- und Logarithmusfunktionen	53
10.4 Nullstellen trigonometrischer Funktionen	54
10.5 Das Bisektionsverfahren	55

1 Grenzwerte von Folgen

Folgen, Monotonie und Beschränktheit

Eine *reelle Zahlenfolge* (a_n) ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ eine reelle Zahl $a(n) = a_n$ zuordnet.

Eine Folge (a_n) ist *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$.

Eine Folge (a_n) ist *streng monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} > a_n$.

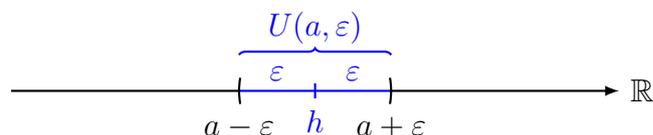
Analog werden (*streng*) *monoton fallende* Folgen definiert.

Eine Folge (a_n) ist *beschränkt*, wenn es eine positive reelle Zahl K gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq K$.

Der Umgebungsbegriff

Ist $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dann ist eine ε -Umgebung $U(a, \varepsilon)$ von a die Menge der Zahlen

$$U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

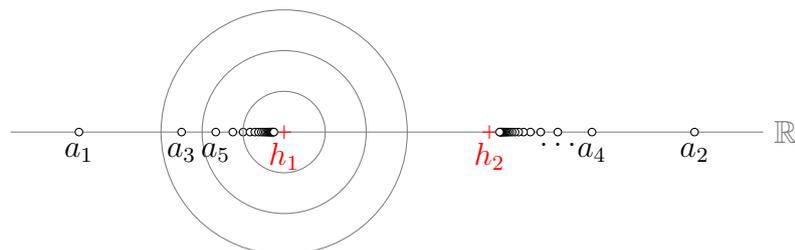


Häufungspunkte (informell)

Eine reelle Zahl h ist ein *Häufungspunkt* der Zahlenfolge (a_n) , wenn für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder in der Umgebung $U(h, \varepsilon)$ liegen.

Fasst man eine Folge

Visualisierungsversuch von Häufungspunkten



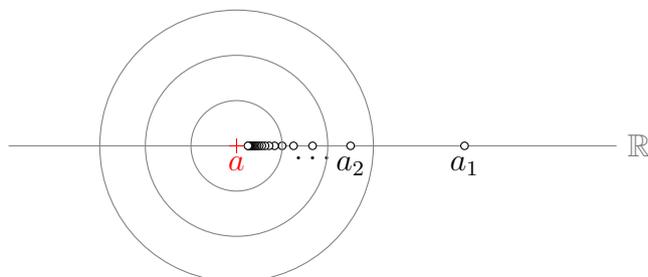
Bei einem Häufungspunkt h genügt es, dass in jeder noch so kleinen Umgebung von h unendlich viele Folgenglieder liegen. Das verbietet nicht, dass auch ausserhalb dieser Umgebungen unendlich viele Folgenglieder (möglicherweise mit weiteren Häufungspunkten) liegen.

Grenzwerte (informell)

Eine reelle Zahl a ist ein *Grenzwert* der Zahlenfolge (a_n) , wenn für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder in der Umgebung $U(a, \varepsilon)$ liegen.

Beachte: Jeder Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt aber nicht umgekehrt.

Visualisierungsversuch eines Grenzwerts



Konvergenz und Divergenz

Eine Folge mit einem Grenzwert wird *konvergent* genannt und man schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Eine Folge (a_n) , die nicht konvergent ist, wird *divergent* genannt.

Nullfolge

Eine Folge (a_n) mit dem Grenzwert $a = 0$ heisst *Nullfolge*.

uneigentliche Konvergenz

Erweitert man die reelle Zahlengerade um die zwei unendlich entfernten „Punkte“ $-\infty$ und ∞ , so sagt man, dass eine Folge (a_n) *uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert*, wenn für jedes noch so grosse $K > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder grösser als K sind.

Eine Folge (a_n) *konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$* , wenn für jedes noch so kleine $K < 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder kleiner als K sind.

Uneigentlich konvergente Folgen werden auch *bestimmt divergent* genannt. Folgen die weder konvergent noch uneigentlich konvergent sind, heissen dann *unbestimmt divergent*.

Beispiel 1.1

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Beispiel 1.2

$$a_n = n!$$

Beispiel 1.3

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

Beispiel 1.4

$$a_n = (-2)^n$$

Beispiel 1.5

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

Formale Definition der Konvergenz (PAM)

Eine Folge (a_n) ist konvergent mit dem Grenzwert a , wenn es für jede (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Ungleichung

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ erfüllt ist.

Das ε in n_ε zeigt an, dass der Index n_ε in der Regel von ε abhängig ist.

Beispiel 1.6

Beweis der Konvergenz von Beispiel 1.1: $a_n = 1/n$

vermuteter Grenzwert:

Beispiel 1.7

Ist die Folge $a_n = 1/2^n$ konvergent?

vermuteter Grenzwert:

Reihen

Zur Erinnerung: Ist (a_n) eine beliebige Folge, so ist die durch

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_n$$

definierte Folge (s_n) die *Teilsummenfolge* oder *Reihe* von (a_n) .

Beispiel 1.8

$$a_n = 3 + 2 \cdot n$$

Beispiel 1.9

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Beispiel 1.10

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Grenzwertsätze

Sind (a_n) und (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen mit den Grenzwerten a und b , so kann die Grenzwertbildung mit den rationalen Operationen $(+, -, \times, \div)$ vertauscht werden. Genauer:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n : b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$ wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

Zwei nützliche Konvergenzkriterien

- Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge (a_n) ist konvergent.
- Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge (a_n) ist konvergent.

Aufgaben (Rhyn ab Seite 9)

84a-i	89 (PAM)	96abde	107
85a-c	90a-m	97a-d	109
86	91a	100abc	
87a-f	92 (nur Formel)	103	
	95ab (PAM)	106	

2 Grenzwerte von Funktionen

Gegeben ist eine Funktion f und eine Stelle x_0

Wir untersuchen, wie sich die Funktionswerte $f(x_n) = y_n$ verhalten, wenn x_n gegen x_0 strebt.

Beispiel 2.1

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ und } x_0 = 3$$

x_n	$f(x_n)$

x_n	$f(x_n)$

Beispiel 2.2

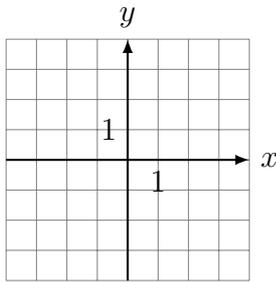
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ und } x_0 = 1$$

x_n	$f(x_n)$

x_n	$f(x_n)$

Graph von f

Für $x \neq 1$ gilt:



Definition

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert g , wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ die Folge (y_n) der Funktionswerte $y_n = f(x_n)$ gegen g konvergiert.

Beispiel 2.3

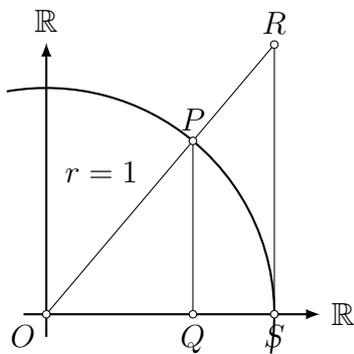
$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$$

Beispiel 2.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

x	$\sin(x)/x$	x	$\sin(x)/x$

Formaler Nachweis (PAM)



Beispiel 2.5 (PAM)

$$f(x) = \frac{\cos x + 1}{x - \pi}; x_0 = \pi$$

Funktionswert:

Kürze mit Hilfe der Produktformel (Formelsammlung S. 99)

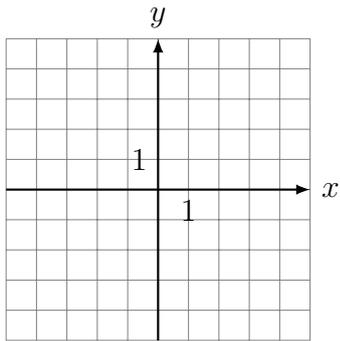
Substitution:

Beispiel 2.6

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, x_0 = 1$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$

Graph von f



Asymptotisches Verhalten

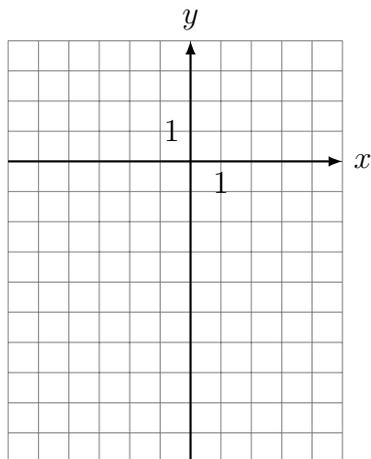
Wie verhält sich $f(x)$ für grosse $|x|$?

Beispiel 2.7

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, x_0 = -1$$

Polynomdivision (Horner):

Graph von f



2.1 Stetigkeit

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 *stetig*, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

wobei alle Ausdrücke in der Gleichung definiert sein müssen.

Aufgaben (Rhyn ab S. 15)

- 13a-i 16a-h
14a-i 17a-c
15a-f

Hinweise: Das Buch bezeichnet mit $[x]$ die „floor“-Funktion $[x]$, die jede reelle Zahl x auf die nächsttiefere ganze Zahl a abrundet; also $[7.7] = [7.7] = 7$, $[5] = [5] = 5$, $[-1.414] = [-1.414] = -2$ und $[-8] = [-8] = -8$

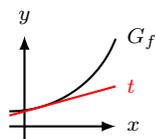
Die Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion) ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

3 Der Differenzialquotient

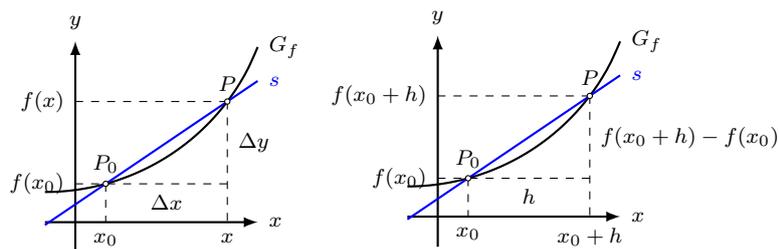
Das Tangentenproblem

Gegeben: eine geeignete Funktion f und eine Stelle x_0



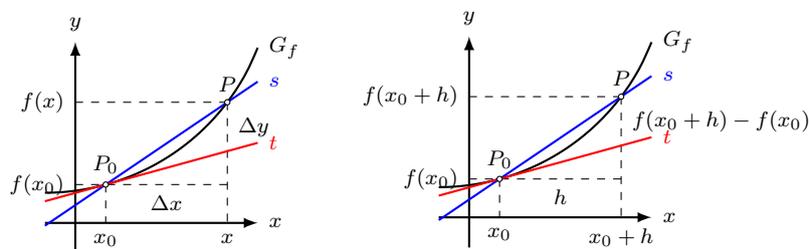
Gesucht: Steigung der Tangente von G_f an der Stelle x_0 .

Differenzenquotient



Steigung der Sekante durch P_0 und P (in zwei Darstellungen):

Der Differenzialquotient



Existiert der Grenzwert

so wird dieser *Differenzialquotient* oder *Ableitung* der Funktion f an der Stelle x_0 genannt und mit $f'(x_0)$ abgekürzt.

Geometrische Deutung

Der Grenzwert

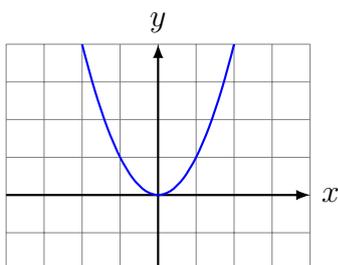
ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 .

Aus praktischen Gründen ersetzen wir in der obigen Formel $x = x_0 + h$ und schreiben

Beispiel 3.1

Gesucht: Gleichung der Tangente und Normale von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

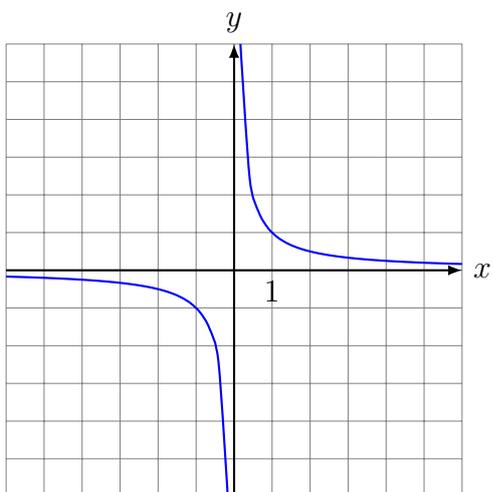
Eine *Normale* ist eine Gerade, die senkrecht zu einer anderen Gerade steht. Hier steht die Normale senkrecht zur Tangente und geht ebenfalls durch den Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$.



Beispiel 3.2

Gesucht: Gleichung der Tangente und Normale von $f(x) = 1/x$ an der Stelle $x_0 = 2$.

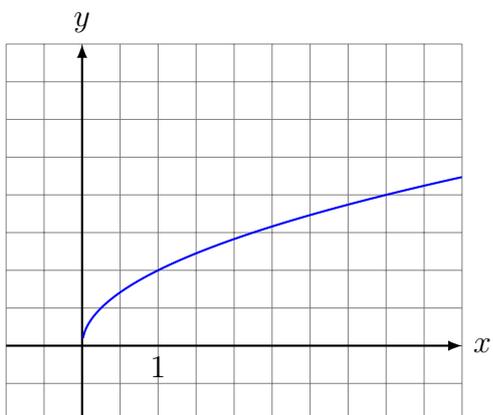
Graph:



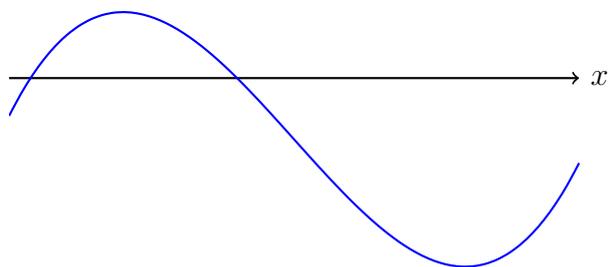
Beispiel 3.3

Gesucht: Gleichung der Tangente und Normale von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Graph:



Grafisches Differenzieren



Aufgaben (Rhyn ab Seite 18)

20a–d

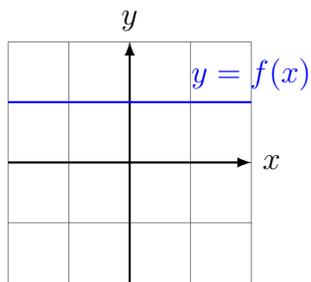
23a–e (sowie die Gleichung der Normalen) 25a–f

26a–d

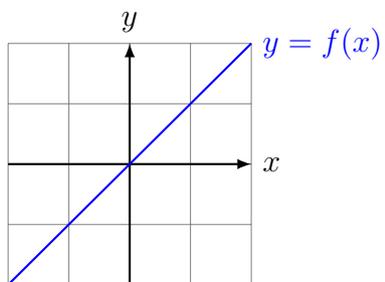
4 Die Ableitungsfunktion

4.1 Elementare Funktionen

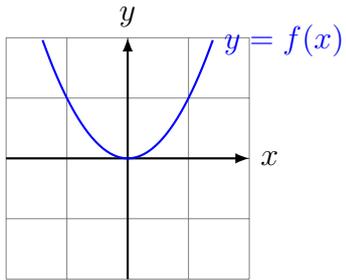
Die konstante Funktion $f(x) = c$



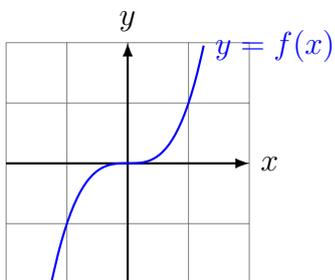
Die Identität $f(x) = x$



Die quadratische Funktion $f(x) = x^2$



Die kubische Funktion $f(x) = x^3$



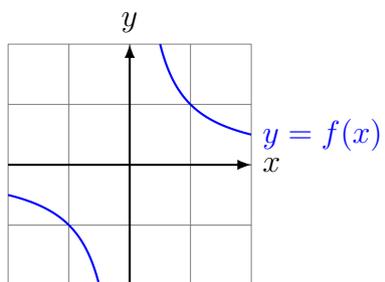
Die quartische Funktion $f(x) = x^4$

Vermutung:

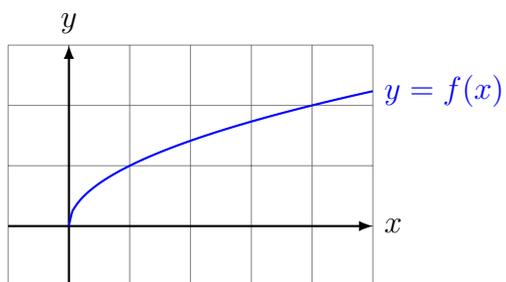
Die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^n$

Beweis:

Die reziproke Funktion $f(x) = 1/x$



Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$



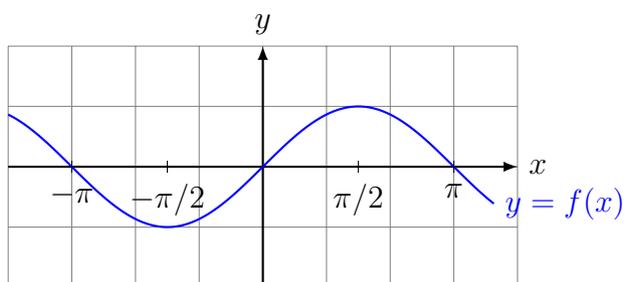
Verallgemeinerung

$$[x^a]' = a \cdot x^{a-1} \text{ (Potenzregel)}$$

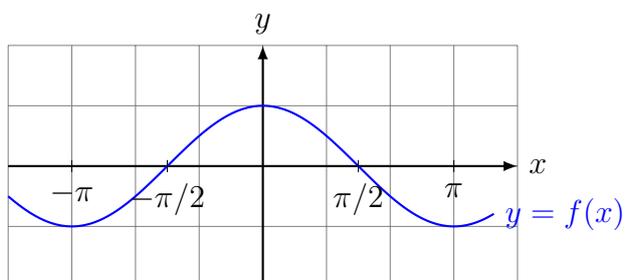
Dadurch lassen sich (b)–(h) verallgemeinern:

- $[x]'$
- $[x^2]'$
- $[x^7]'$
- $[1/x]'$
- $[\sqrt{x}]'$

Die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

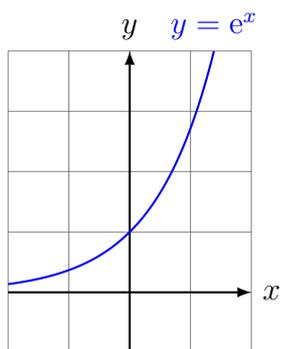


Die Cosinusfunktion $f(x) = \cos x$

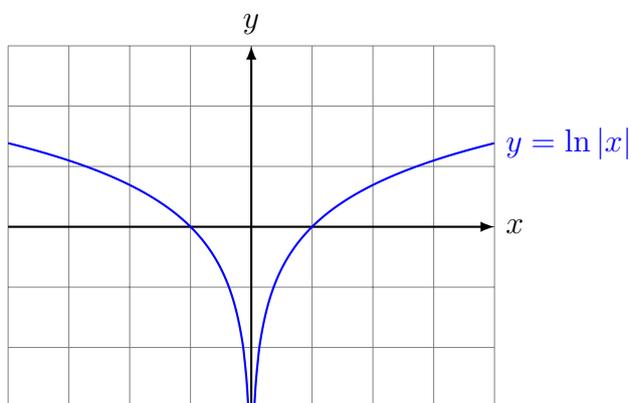


Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$

($e \approx 2.71828$ Eulersche Zahl)



Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$



4.2 Der Differenzialoperator

Ist eine Funktion f für jedes x aus ihrem Definitionsbereich differenzierbar, so wird durch f' eine neue Funktion definiert:

Funktion	$x \rightarrow f(x)$
Ableitungsfunktion	$x \rightarrow f'(x)$

Diese Tabelle können wir auch so interpretieren, dass der Funktion f , eine Funktion f' zugeordnet wird. Diese „Meta-Funktion“, welche einer Funktion ihre Ableitungsfunktion zuordnet, wird *Differentialoperator* genannt und so dargestellt:

$$\frac{d}{dx} : f \rightarrow f' \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f = f'$$

Beispiel: $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

4.3 Zusammenfassung

$f(x)$	$f'(x)$
c (const.)	0
x	1
\sqrt{x}	$1/(2\sqrt{x}) \quad (x > 0)$
$1/x$	$-1/x^2 \quad (x \neq 0)$
$x^r \quad (r \in \mathbb{R})$	$r \cdot x^{r-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x $	$1/x$

Zusätzliche Ableitungsfunktionen erhalten wir aus den Ableitungsregeln.

5 Ableitungsregeln

Wie werden Summen, Produkte, Quotienten, und Verkettungen von Funktionen differenziert?

5.1 Summenregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, dann gilt:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 5.1

$$(x^5 + \sin x)'$$

5.2 konstante Faktoren

Ist c eine reelle Zahl und die Funktion f an der Stelle x differenzierbar, dann gilt:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned} [c \cdot f(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 5.2

$$(5 \cdot x^3)'$$

Beispiel 5.3

$$(\log_a x)'$$

5.3 Produktregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, dann gilt

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 5.4

$$(x^2 \cdot \cos x)'$$

Beispiel 5.5

clever:

$$(x^3 \cdot x^5)'$$

naiv aber falsch:

$$(x^3 \cdot x^5)'$$

umständlich aber korrekt:

$$(x^3 \cdot x^5)'$$

5.4 Ableitung des Kehrwerts

Ist die Funktion g an der Stelle x differenzierbar und $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Beweis

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{g(x)} \right]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-[g(x+h) - g(x)]}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \right] \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= -g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

5.5 Quotientenregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right]' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[\frac{1}{g(x)} \right]' \quad (\text{Produktregel}) \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2} \right) \quad (\text{Kehrwert-Regel}) \\ &= f'(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)^2} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

„direkter“ Beweis

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right) \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Beispiel 5.6

$$(\tan x)'$$

oder:

$$(\tan x)'$$

5.6 Kettenregel

Ist die Funktion g an der Stelle x differenzierbar und ist die Funktion f an der Stelle $y = g(x)$ differenzierbar, so gilt:

$$[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beweis

Vorbereitungen:

$$\text{Setze } k \stackrel{(*)}{=} g(x+h) - g(x) \Leftrightarrow g(x+h) \stackrel{(**)}{=} g(x) + k$$

Da g an der Stelle x differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) - g(x)] = 0$$

Wenn h gegen 0 konvergiert, dann konvergiert k gegen 0. (***)

$$\begin{aligned}
[f(g(x))]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{h} \quad \text{mit (**)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{k}{h} \right] \quad \text{multipliziere mit } 1 = \frac{k}{k} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \quad \text{mit (*)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{mit (***)} \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Beispiel 5.7

$$(\sin(x^2))' = \dots$$

Beispiel 5.8

$$(\sin^2 x)' = \dots$$

Beispiel 5.9

$$(a^x)'$$

Beispiel 5.10

$$(\ln(\ln(x)))'$$

5.7 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Ist f^{-1} die Umkehrfunktion von f , so gilt:

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Nun leitet man die linke Seite (Kettenregel) und die rechte Seite der Gleichung ab:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

und löst die Gleichung algebraisch nach $(f^{-1})'(x)$ auf:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beispiel 5.11

$$f(x) = y = \ln x$$

Beispiel 5.12

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Beispiel 5.13

$$y = f(x) = \arcsin x$$

5.8 Höhere Ableitungen

Leitet man die Ableitung einer Funktion ein zweites Mal ab, so spricht man von der zweiten Ableitung. Analog wird die dritte, vierte, \dots , n -te Ableitung definiert.

- Statt $(f')'$ schreibt man f'' oder $\frac{d^2 f}{dx^2}$
- Statt $((f')')'$ schreibt man f''' oder $\frac{d^3 f}{dx^3}$
- Statt $((((f')')')')$ schreibt man $f^{(4)}$ oder $\frac{d^4 f}{dx^4}$
- Statt $(((((f')')')')')$ schreibt man $f^{(5)}$ oder $\frac{d^5 f}{dx^5}$
- usw.

Beispiel 5.14

$$\frac{d^3}{dx^3}(e^{2x})$$

Beispiel 5.15

$$(\sin x)^{(9)}$$

5.9 Implizite Differentiation (PAM)

Beispiel 1

Berechne die Steigung der Tangente im Punkt $P(1, y_0)$, der auf der Kurve $k: x^2 + y^2 = 4$ liegt und eine positive Ordinate hat.

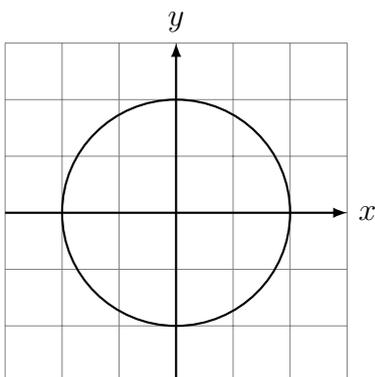
- (a) Leite die linke und rechte Seite der impliziten Funktionsgleichung nach x ab. Dabei werden Ausdrücke der Form $h(y)$ mit der Kettenregel

$$\frac{dh(y)}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \cdot y'$$

nach x abgeleitet:

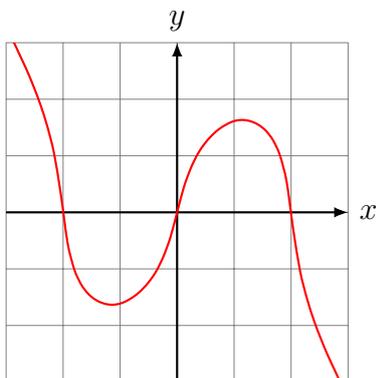
- (b) Löse die Gleichung aus (a) nach y' auf.

- (c) Berechne die Koordinate y_0 und setze sie mit $x_0 = 1$ in die Gleichung von (b) ein:



Beispiel 2

Berechne die Winkel zwischen der Kurve $3x^3 - 12x + y^3 + 3y = 0$ und der x -Achse.



Beispiel 3

Berechne die Ableitung von $y = x^x$ für $(x > 0)$.

6 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

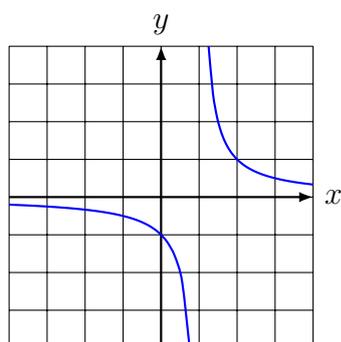
6.1 Definitionslücken

Ist eine Funktion f an einer einzelnen Stelle x_0 nicht definiert, so spricht man von einer *Definitionslücke*.

Im „Schulalltag“ entstehen Definitionslücken an den Stellen, wo man durch Null dividiert.

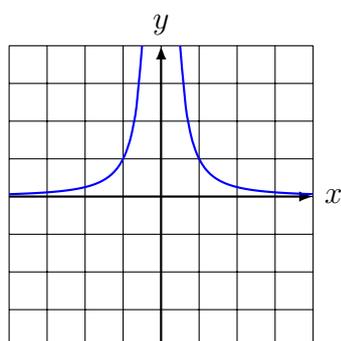
Beispiel 6.1

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$



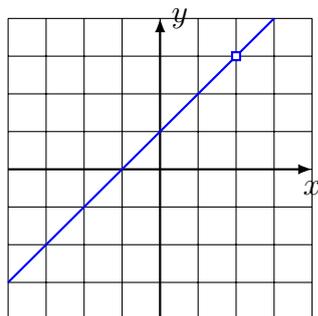
Beispiel 6.2

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



Beispiel 6.3

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} \stackrel{*}{=} x+1 \quad [* \text{ nur erlaubt, wenn } x \neq 2]$$



6.2 Stetigkeit

Anschaulich

Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 *stetig*, wenn der Graph von f in einer Umgebung von x_0 ohne Unterbruch gezeichnet werden kann.

Achtung: Diese Beschreibung kann in einigen Fällen irreführend sein (siehe Beispiel 6.5).

Formal (Limeskriterium)

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der Funktionswert und der Grenzwert an der Stelle x_0 existieren und übereinstimmen; d. h. wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Eine Funktion ist auf einem Intervall I stetig, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls I stetig ist.

Bemerkung

Fordert man nur, dass an der Stelle x_0 der links- oder der rechtsseitige Grenzwert

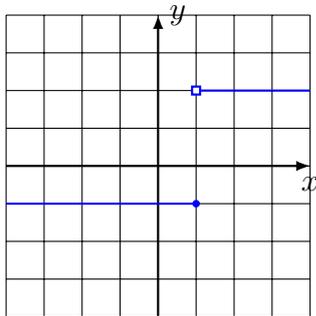
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

existiert, so spricht man von *links-* bzw. *rechtsseitiger* Stetigkeit.

Beispiel:

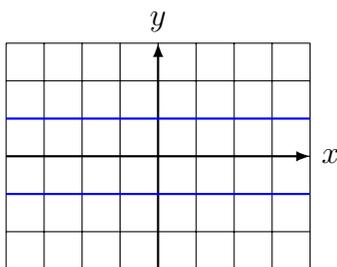
Beispiel 6.4

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x \leq 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiel 6.5

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Vorsicht

Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist für jedes $x \in D$ stetig!

f ist für $x = 0$ bloss nicht definiert.

Eine Auswahl stetiger Funktionen

- Potenzfunktionen: x^k , $k \in \mathbb{Z}$
- Trigonometrische Funktionen: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- Exponentialfunktionen: a^x
- Logarithmusfunktionen: $\log_a x$

Eigenschaften

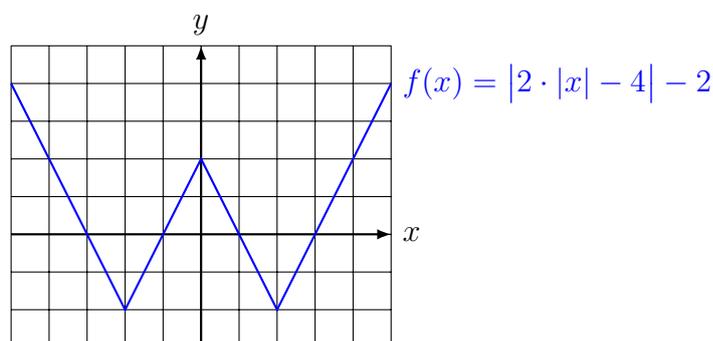
Sind die Funktionen f und g auf einem gemeinsamen Definitionsbereich stetig, dann gilt:

- $f + g$ ist stetig
- $f - g$ ist stetig
- $f \cdot g$ ist stetig
- f/g ist stetig
- $f \circ g$ ist stetig

6.3 Differenzierbarkeit

Anschaulich

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn dort (eindeutig) die Tangente an den Graphen gezeichnet werden kann.



f ist an den Stellen $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$ nicht differenzierbar.

Formal

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Eine Funktion ist auf dem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbar, wenn sie an *jeder* Stelle $x \in I$ differenzierbar ist.

Analog zur links- und rechtssetigen Stetigkeit werden links- und rechtssetige Differenzierbarkeit definiert.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist sie dort auch immer stetig. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel der Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ zeigt.

7 Monotonie

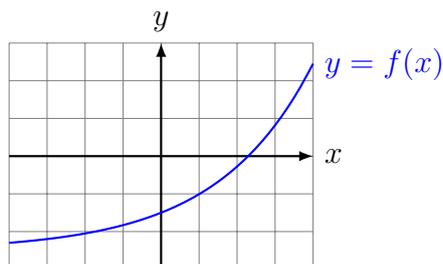
Definitionen

Ist die Funktion f auf einem Intervall I definiert, so heisst f

- *monoton wachsend*, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ erfüllt ist.
- *monoton fallend*, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ erfüllt ist.
- *monoton*, wenn f auf dem Intervall I entweder *monoton wachsend* oder *monoton fallend* auf I ist.
- *nicht monoton*, wenn f auf dem Intervall I weder *monoton wachsend* noch *monoton fallend* ist.

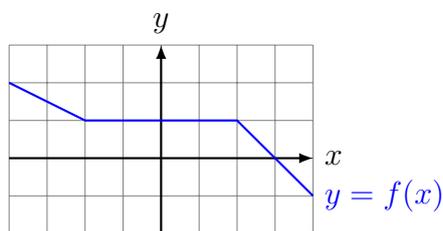
Gilt statt $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$ sogar $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, so ist f *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend*.

Beispiel 7.1



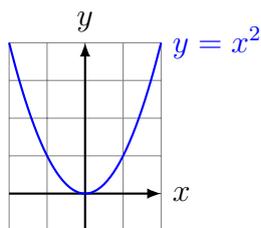
f ist streng monoton wachsend auf $I = [-4, 4]$

Beispiel 7.2



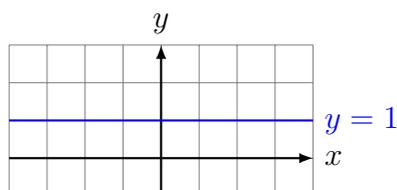
f ist monoton fallend auf $I = [-4, 4]$

Beispiel 7.3



$f(x) = x^2$ ist auf $I = [-2, 2]$ nicht monoton.

Beispiel 7.4



$f(x) = 1$ ist auf

- jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ monoton.
- auf keinem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ streng monoton.

Satz 7.1

- Ist f im Intervall I differenzierbar und monoton steigend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
- Ist f im Intervall I differenzierbar und monoton fallend, so gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

Beweis

Es sei f auf I monoton steigend und $x_0 \in I$. Wegen der Monotonie gilt für alle $x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$$
$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$$
$$f'(x_0) \geq 0$$

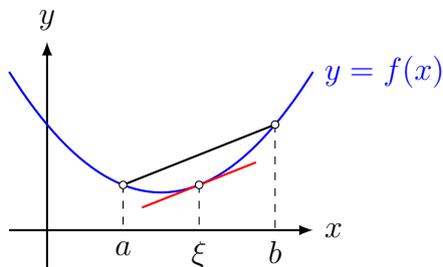
Analog für monoton fallende Funktionen. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch; ist aber etwas schwieriger zu beweisen. Dazu benötigt man den ...

Satz 7.2 (Mittelwertsatz)

Ist die Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig und differenzierbar in (a, b) , dann gibt es eine Stelle ξ mit $a < \xi < b$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



(der Beweis folgt später)

Satz 7.3 (Monotoniesatz)

Ist die Funktion f auf dem Intervall I differenzierbar und gilt $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] für alle $x \in I$, dann ist f in I streng monoton wachsend [fallend].

Beweis

Es sind $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Gemäss Mittelwertsatz gibt es eine Stelle $\xi \in I$ mit $x_1 < \xi < x_2$, so dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

Da nach Voraussetzung $f'(\xi) > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$ sind, gilt $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Daraus folgt $f(x_2) > f(x_1)$.

Also ist f monoton wachsend. □

Die Standardaufgabe

Auf welchen Intervallen, ist die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 12x + 1$$

monoton wachsend bzw. fallend?

Schritt 1

Erste Ableitung berechnen:

Schritt 2

Bestimme die Stellen mit horizontaler Tangente ($f'(x) = 0$):

Schritt 3

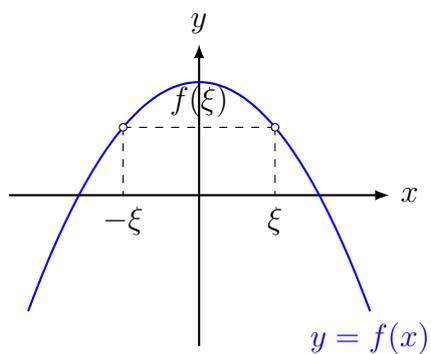
Zerlege f' aufgrund der Nullstellen in Linearfaktoren und erstelle damit eine Vorzeichen-tabelle:

Bereich				
$f'(x)$				
$f(x)$				

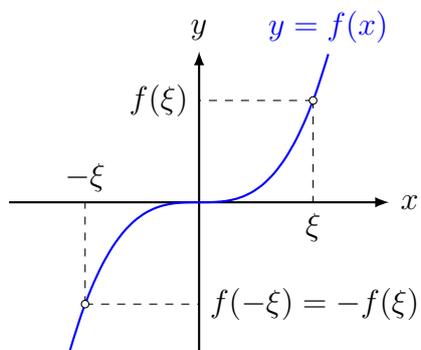
Der Eintrag in Zeile „ $x + 3$ “ und Kolonne „ $-4 < x < -3$ “ ist so zu ermitteln: Wenn x im Intervall $-4 < x < -3$ liegt, dann ist der Faktor $x + 3$ negativ. Das Gesamtvorzeichen eines Intervalls erhält man durch „Multiplizieren“ der Vorzeichen innerhalb der Kolonne.

8 Symmetrie

Achsensymmetrie bezüglich $x = 0$



Punktsymmetrie bezüglich $(0, 0)$



Bemerkung

Jede Funktion f kann als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u dargestellt werden.

9 Asymptotisches Verhalten

Wie verhält sich eine Funktion f für grosse $|x|$?

konkret:

9.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$$

x^n ausklammern:

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

$$f(x) \approx a_n x^n \text{ für grosse } |x|$$

Beispiel 9.1

$$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

Beispiel 9.2

$$f(x) = 1 - 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$$

Beispiel 9.3

$$f(x) = (1 - 3x)(2 - 4x^2)$$

9.2 Gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$(a_i, b_j \in \mathbb{R}, a_m \neq 0, b_n \neq 0)$$

Falls $m \geq n$, so lässt sich f durch eine Polynomdivision als Summe einer ganzrationalen Funktion $q(x)$ und einer *echt* gebrochenrationalen Funktion $r(x)$ darstellen:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + r(x)$$

Beispiel 9.4

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^3 - 3x^2 + x + 1}$$

Beispiel 9.5

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

Beispiel 9.6

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 3x - 1}$$

9.3 Exponentialfunktionen

Für $a > 1$ gilt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x =$$

Exponentialfunktionen verändern sich schneller als Potenzfunktionen!

Für einen fest gewählten Exponenten r gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{a^x} =$$

Beispiel 9.7

$$f(x) = (1 - x^2)e^x$$

9.4 Logarithmusfunktionen

Für $a > 1$ gilt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) =$$

Logarithmusfunktionen verändern sich langsamer als Potenzfunktionen!

Für einen fest gewählten Exponenten r gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(x)}{x^r} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^r \log_a(x) =$$

Beispiel 9.8

$$f(x) = (1 - x^2) \ln x$$

9.5 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ haben keine Grenzwerte für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.

Aufgrund der Beschränktheit von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ kann im Verbund mit anderen Funktionen das asymptotische Verhalten jedoch definiert sein.

Beispiel 9.9

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Beispiel 9.10

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

10 Nullstellen

Ist f eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich D , so ist $x_0 \in D$ eine *Nullstelle* von f , wenn gilt $f(x_0) = 0$.

10.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Für ganzrationale Funktionen (Polynome) bis zum Grad 4 gibt es Lösungsformeln zur Nullstellenbestimmung.

Die Formeln zum Lösen linearer und quadratischer Funktionen sollten bekannt sein. Kubische und quartische Gleichungen werden (teilweise) im PAM-Unterricht behandelt.

Für Polynomfunktionfunktionen vom Grad 5 und höher ist man auf numerische Näherungsverfahren angewiesen.

Beispiel 10.1

$$f(x) = 3x + 7$$

Beispiel 10.2

$$f(x) = x^2 - 7x + 12$$

Beispiel 10.3

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Abspalten von Linearfaktoren

Wenn von der Polynomfunktion f vom Grad n eine Nullstelle x_0 bekannt ist, lässt sie sich durch Polynomdivision der Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten.

$$f(x) = g(x) \cdot (x - x_0)$$

wobei $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

Beispiel 10.4

Die Polynomdivision zeigt, dass $x = 3$ eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ ist.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x - 3) = x^2 - 2x + 1 \\
 -(x^3 - 3x^2) \\
 \hline
 -2x^2 + 7x \\
 -(-2x^2 + 6x) \\
 \hline
 x - 3 \\
 -(x - 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Das Horner-Schema

Durch Ausklammern kann die Auswertung des Polynoms auf eine Folge von Multiplikationen und Additionen reduziert werden:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$f(x) = x(a_3x^2 + a_2x + a_1) + a_0$$

$$f(x) = x(x(\underbrace{a_3x + a_2}_{\alpha}) + a_1) + a_0 = x(\underbrace{x\alpha + a_1}_{\beta}) + a_0 = \underbrace{x\beta + a_0}_{\gamma}$$

Die geschickte tabellarische Anordnung dieser Operationen ergibt das *Horner-Schema*:

		a_2	a_1	a_0
x	a_3	α	β	γ

Beispiel 10.5

x		-5	7	-3
3	1			

Ist $x = x_0$ Nullstelle des Polynoms $f(x)$ vom Grad n , so sind die ersten $n - 1$ Zwischenergebnisse im Horner-Schema die Koeffizienten des Quotienten $g(x) = f(x) : (x - x_0)$.

Beispiel 10.6

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$$

x		4	3	-4	-4	Nullstellen:
	1					

10.2 Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion ist ein Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

x_0 ist genau dann Nullstelle von f , wenn x_0 Nullstelle von p aber nicht von q ist.

Beispiel 10.7

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Beispiel 10.8

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$$

10.3 Nullstellen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Beispiel 10.9

$$f(x) = e^x$$

Beispiel 10.10

$$f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^x$$

Beispiel 10.11

$$f(x) = \log_{10} x$$

Beispiel 10.12

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$$

10.4 Nullstellen trigonometrischer Funktionen**Beispiel 10.13**

$$f(x) = \sin(ax + b)$$

Beispiel 10.14

$$f(x) = \cos(ax + b)$$

Beispiel 10.15

$$f(x) = \tan(ax + b)$$

10.5 Das Bisektionsverfahren

Das folgende Verfahren erlaubt es, eine Nullstelle ξ einer stetigen Funktion f im Intervall $a \leq \xi \leq b$ näherungsweise zu berechnen, wenn $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen haben.

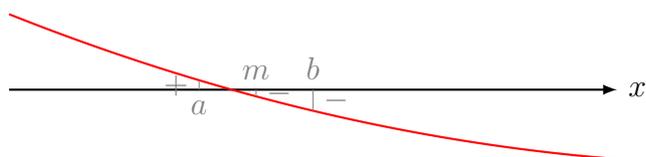
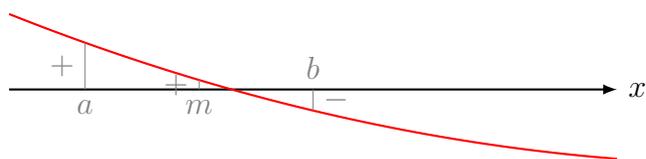
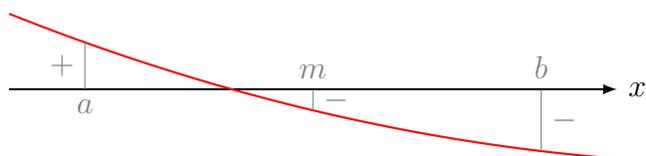
Vorbereitung

- Gebe die Genauigkeit ε der Lösung vor (z. B. $\varepsilon = 10^{-6}$).
- Wähle $a < b$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.



Iterationsschritt

- Berechne $(a + b)/2 \rightarrow m$
- Wenn $f(a) \cdot f(m) < 0$: $m \rightarrow b$
sonst: $m \rightarrow a$
- Wenn $|b - a| < \varepsilon$: gib m aus und beende das Verfahren
sonst: wiederhole den Schritt



```

PROGRAM:BISECT
1  :Prompt A,B,E
2  :Repeat abs(B-A)<E
3  :(A+B)/2→M
4  :A→X:prgmF:Y→S
5  :M→X:prgmF:Y→T
6  :If S*T<0
7  :Then
8  :M→B
9  :Else
10 :M→A
11 :End
12 :Disp M
13 :End

```

Das Programm setzt voraus, dass sich die Funktionsgleichung von f in der Form $f(X) \rightarrow Y$ im Programm prgmF befindet.