Die Summenregel (Repetition)

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch ihre Summe bzw. Differenz an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\big[f(x) \pm g(x)\big]' = f'(x) \pm g'(x)$$

Beispiel: $\big[x^3 + \sin x\big]' = \big[x^3\big]' + \big[\sin x\big]' = 3x^2 + \cos x$

Die Faktorregel (Repetition)

Ist die Funktion f an der Stelle x differenzierbar und ist k eine reelle Zahl, so ist auch die Funktion $k \cdot f$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\big[k \cdot f(x)\big]' = k \cdot f'(x)$$

Beispiel: $\big[4 \cdot x^3\big]' = 4 \cdot \big[x^3\big]' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

Die Produktregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch ihr Produkt $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\big[f(x) \cdot g(x)\big]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $\big[x^2 \cdot x^3\big]' = \big[x^2\big]' \cdot x^3 + x^2 \cdot \big[x^3\big]' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^3 = 5x^4$

Kontrolle: $\big[x^2 \cdot x^3\big]' = \big[x^5\big]' = 5x^4$

Falsch: $\big[x^2 \cdot x^3\big]' \neq \big[x^2\big]' \cdot \big[x^3\big]' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$

Die Quotientenregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar und $g(x) \neq 0$, so ist auch ihr Quotient f/g an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Beispiel: $\left[\frac{x^5}{x^3}\right]' = \frac{\big[x^5\big]' \cdot x^3 - x^5 \cdot \big[x^3\big]'}{\big(x^3\big)^2} = \frac{5x^4 \cdot x^3 - x^5 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{5x^7 - 3x^7}{x^6} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x$

Kontrolle: $\left[\frac{x^5}{x^3}\right]' = \big[x^2\big]' = 2x$

Falsch: $\left[\frac{x^5}{x^3}\right]' \neq \frac{\big[x^5\big]'}{\big[x^3\big]'} = \frac{5x^4}{3x^2} = \frac{5x^2}{3}$

Die Kettenregel

Ist die Funktion g an der Stelle x differenzierbar und ist die Funktion f an der Stelle $z = g(x)$ differenzierbar, so ist die Funktion $f \circ g$ (*lies:* „f verkettet mit g“) an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(z\big) \cdot g'(x) \quad \text{mit } z = g(x)$$

Beispiel: $\left[\left(x^2\right)^3\right]' = \left[z^3\right]' \cdot \left[x^2\right]' \overset{*}{=} 3z^2 \cdot 2x = 3\left(x^2\right)^2 \cdot 2x = 3x^4 \cdot 2x = 6x^5$

* Leite z^3 nach z ab und ersetze danach z wieder durch x^2.

Kontrolle: $\left[\left(x^2\right)^3\right]' = \left[x^6\right]' = 6x^5$

Bemerkung

Die in der Produkte-, der Quotienten- und der Kettenregel verwendeten Beispielfunktionen sind untypisch und haben nur den Zweck, die Gültigkeit der Ableitungsregeln plausibel zu machen.

In der Praxis würde man zuerst den Term mit den Potenzgesetzen vereinfachen und dann die resultierende Potenzfunktionen ableiten, so wie das unter „Kontrolle“ gemacht wurde.