Matura 2019/Aufgabe 7

(a) *Zielfunktion:* $L(l, r) = 4l + 4r + 2\pi r$

Nebenbedingung: $V = \frac{1}{2}\pi r^2 l$ (halbes Zylindervolumen)

NB → ZF: $l = \frac{2V}{\pi r^2}$

$$L(r) = \frac{8V}{\pi r^2} + 4r + 2\pi r = (2\pi + 4)r + \frac{8V}{\pi r^2}$$

(b) *Extremstelle(n) bestimmen:* ($V = 100$ einsetzen)

$$L'(r) = 0$$

$$= (2\pi + 4) - \frac{16 \cdot 100}{\pi r^3} = 0 \quad || \cdot \pi r^3$$

$$(2\pi + 4)\pi r^3 - 1600 = 0$$

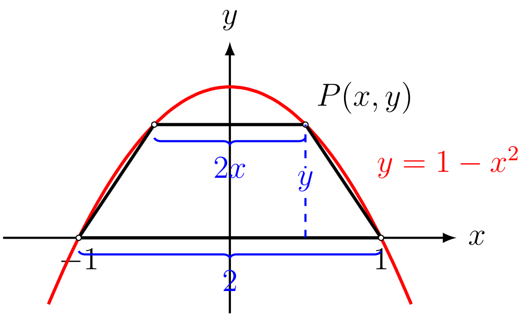
$$r^3 = \frac{1600}{(2\pi + 4)\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1600}{(2\pi + 4)\pi}} \approx 3.672\,\mathrm{dm}$$

$$l = \frac{2 \cdot 100}{\pi r^2} \approx 4.720\,\mathrm{dm}$$

$$L''(r) = \frac{48 \cdot 100}{\pi r^4} > 0 \text{ für alle } r \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Matura 2023/Aufgabe 2



Zielfunktion: $A(x,y)=\frac{1}{2}(2+2x)\cdot y$ (Mittelline $\times$ Höhe)

Nebenbedingung: $y=1-x^2$

NB in ZF einsetzen: $A(x)=\frac{1}{2}(2+2x)(1-x^2)=(1+x)(1-x^2)=-x^3-x^2+x+1$

Ableitungen bereitstellen:
$$A'(x)=-3x^2-2x+1$$
$$A''(x)=-6x-2$$

Extremstellen bestimmen:
$$A'(x)=0$$
$$p-3x^2-2x+1=0$$
$$x_1=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad f''(\tfrac{1}{3})=-4<0$$
$$x_2=-1 \quad\Rightarrow\quad f''(-1)=4>0$$

$\Rightarrow$ Maximum für $x=\frac{1}{3}$

Übrige gesuchte Grössen berechnen: $y=f(\frac{1}{3})=\frac{8}{9} \quad\Rightarrow\quad P(\frac{1}{3},\frac{8}{9})$