Aufgabe 3.1

(a) $f(4+h) = \sqrt{2(4+h)-3} = \sqrt{8+2h-3} = \sqrt{2h+5}$

(b) $f(-1+h) = (-1+h)^2 - 2(-1+h) + 5$
$= 1 - 2h + h^2 + 2 - 2h + 5 = h^2 - 4h + 8$

(c) $f(2+h) = \dfrac{2(2+h)+1}{3(2+h)+2} = \dfrac{4+2h+1}{6+3h+2} = \dfrac{2h+5}{3h+8}$

Aufgabe 3.2

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ von $a^k b^{n-k}$ in der ausmultiplizierten Form von $(a+b)^n$ kann mit dem Pascalschen Dreieck oder mit der Taschenrechnerfunktion n nCr k bestimmt werden.

(b) $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

(c) $(x-2)^5 = x^5 + 5x^4(-2)^1 + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3 + 5x^1(-2)^4 + (-2)^5$
$= x^5 - 10^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

Aufgabe 3.3

(a) Koeffizient von x^3y^8 in $(x+y)^{11}$:

$\binom{11}{3} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$ (oder mit TI30X: 11 nCr 3)

(b) Koeffizient von x^4 in $(x-2)^9$:

$\binom{9}{4} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ (oder mit TI30X: 9 nCr 4)

$126x^4(-2)^5 = -4032x^4 \quad \Rightarrow \quad$ Koeffizient: -4032

Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + \frac{h-2}{h-2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2+h-2}{h-2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{h-2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h-2} = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \qquad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{0+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \big(3x^2 + 3xh + h^2\big) = 3x^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

Für die Tangentengleichung sind die Koordinaten des Kurvenpunktes (x_0, y_0) zusammen mit der Steigung m in die Gleichung der Form $y = mx + q$ einzusetzen und nach q aufzulösen:

Steigung: $m_t = f'(2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^3\right)\Big|_{x=2} = 6$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$

$y_0 = m_t x_0 + q$

$4 = 6 \cdot 2 + q$

$q = -8$

Gleichung der Tangente: $t\colon y = 6x - 8$

Für die Gleichung der Normalen berechnet man deren Steigung m_n aus der Steigung der Tangente m_t und geht dann wie oben vor.

Steigung: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{6}$

$y_0 = m_t x_0 + q$

$4 = -\frac{1}{6} \cdot 2 + q$

$4 = -\frac{1}{3} + q$

$12 = -1 + 3q$

$13 = 3q$

$q = \frac{13}{3}$

Gleichung der Normalen: $t\colon y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{3}$

Aufgabe 3.9

$f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$ (TR)

(b) $y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{4}{2} = 2$

$$\begin{aligned} y_0 &= m \cdot x_0 + q \\ 2 &= -\tfrac{1}{2} \cdot 1 + q \\ q &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

$t\colon\, y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

- $$\begin{aligned} m_t \cdot m_n &= -1 \\ -\tfrac{1}{2} \cdot m_n &= -1 \\ m_n &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= m_t \cdot x_0 + q_t \\ 2 &= 2 \cdot 1 + q \\ q &= 0 \end{aligned}$$

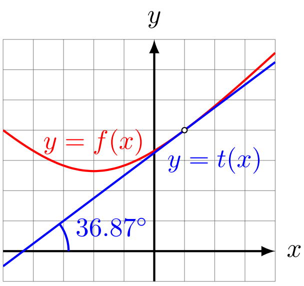
$n\colon\, y = 2\,x$

Aufgabe 3.10

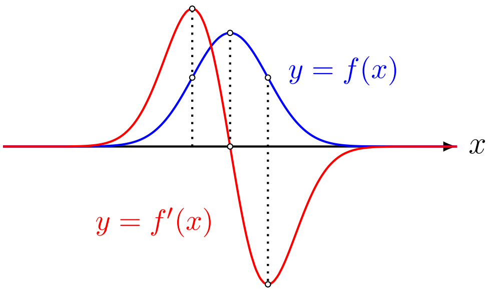
$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$

$f'(1) = 0.75$ (TR)

$\alpha = \arctan(0.75) = 36.87°$

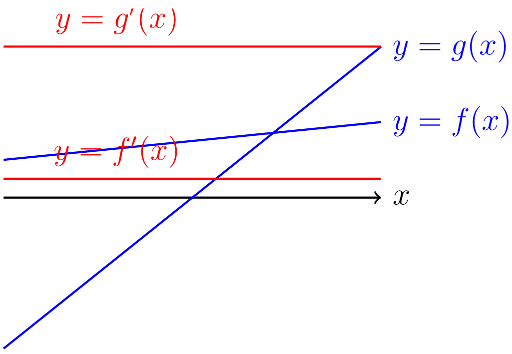


Aufgabe 3.11



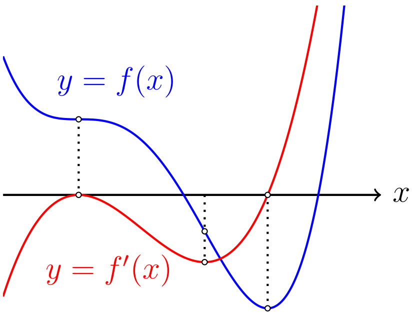
- Stellen von f mit horizontaler Tangente werden Nullstellen von f'.
- Stellen von f mit maximaler Steigung werden Hochstellen von f'.
- Stellen von f mit minimaler Steigung werden Tiefstellen von f'.

Aufgabe 3.12



Wichtig ist nur, dass die beiden Ableitungsfunktionen parallel zur x-Achse sind und dass die Ableitung der Geraden mit der grösseren Steigung auch oberhalb der Ableitung der Geraden mit der kleineren Steigung liegt.

Aufgabe 3.13



- Stellen von f mit horizontaler Tangente werden Nullstellen von f'.
- Stellen von f mit maximaler Steigung werden Hochstellen von f'.
- Stellen von f mit minimaler Steigung werden Tiefstellen von f'.