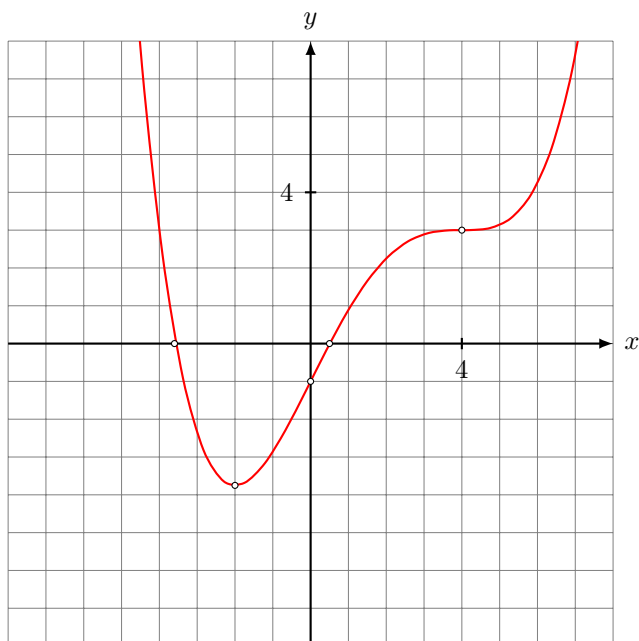


Aufgabe 1 (5P)

- Nullstellen: $x_1 \approx 0.5$; $x_2 \approx -3.6$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- TiP(-2, -3.75); WeP(0, -1); TeP(4, 3)



Aufgabe 2 (10P)

$$f: y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$
- *Symmetrie:* Da die Funktion eine Summe aus geraden und ungeraden Funktionen ist, ist ihr Graph weder zur Ordinate noch zum Ursprung symmetrisch
- *asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = \infty$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = 0$
- *Ableitungen:* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$
 $f'(x) = x^2 - 4x - 5$
 $f''(x) = 2x - 4$
 $f'''(x) = 2$

- *Extrempunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f'(x) = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x + 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 5$$

$$\text{Test: } f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(-1, 2.67)$$

$$f''(5) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(5, -33.33)$$

- *Wendepunkte:*

$$\text{Kandidate(n): } f''(x) = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

$$\text{Test: } f'''(2) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{WeP}(2, -15.33)$$

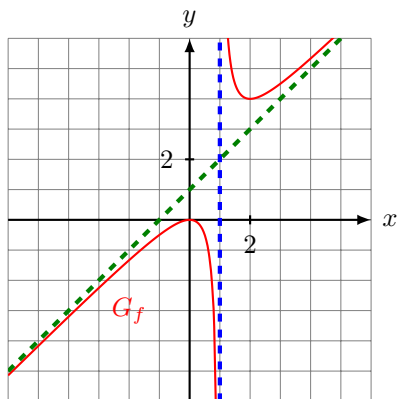
Aufgabe 3 (3P)

$$f: y = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

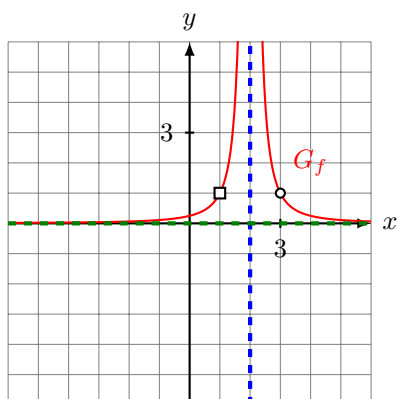
Polstelle: $x = 1$ (mit Vorzeichenwechsel)

Asymptote: $y = x + 1$

Nullstelle(n): $x_1 = x_2 = 0$



Aufgabe 4 (2P)



Polstelle: $x = 2$ (ohne Vorzeichenwechsel)

keine Nullstellen

hebbare Definitionslücke bei $x = 1$

$$\text{Ansatz: } f(x) = \frac{(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

$$\text{Kontrolle: } f(3) = \frac{(3-1)}{(3-1)(3-2)^2} = 1 \text{ (ok)}$$

Aufgabe 5 (6P)

$$f: y = x^4 - 18x^2 + 32$$

- Symmetrie: ordinatensymmetrisch, denn

$$f(-x) = (-x)^4 - 18(-x)^2 + 32 = x^4 - 18x^2 + 32 = f(x) \quad \forall x \in D$$

- Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 36x$

$$f''(x) = 12x^2 - 36$$

- Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 36x = 0$$

$$4x(x^2 - 9) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -3$$

$$\text{Test: } f''(0) = -36 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(0, 32)$$

$$f''(3) = 72 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(3, -49)$$

$$\text{Symmetrie} \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-3, -49)$$

Bonusaufgabe

$$\text{Nullstellen: } x^4 - 18x^2 + 32 = 0$$

$$u^2 - 18u + 32 = 0 \quad \text{mit } u = x^2$$

$$(u - 16)(u - 2) = 0$$

$$u_1 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 4$$

$$u_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$