

Vektorgeometrie (II)

Lösungen+

Aufgabe 5.1

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -21 \\ 24 \\ 15 \end{pmatrix}$

Gesucht: $-\frac{4}{3}\vec{a}$

Aufgabe 5.1

$$-\frac{4}{3}\vec{a} = \begin{pmatrix} 28 \\ -32 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.2

Gegeben: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

Aufgabe 5.3

Gegeben: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

Aufgabe 5.4

Gegeben: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot 0.5 = 20$$

Aufgabe 5.5

Gegeben: $|\vec{a}| = 4.5$, $|\vec{b}| = 2.1$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 4.5 \cdot 2.1 \cdot \cos 90^\circ = 4.5 \cdot 2.1 \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 5.6

Gegeben: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 6$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.6

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 11 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 11 \cdot 6 \cdot \frac{-1}{2} = -33$$

Aufgabe 5.7

Gegeben: $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 9 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 18 \cdot (-1) = -18$$

Aufgabe 5.8

Gegeben: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.8

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{-4}{4 \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ$$

Aufgabe 5.9

Gegeben: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6\sqrt{3}$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.9

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{6\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$$

Aufgabe 5.10

Gegeben: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Gesucht: $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.10

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{0}{5 \cdot 2} = \arccos 0 = 90^\circ$$

Aufgabe 5.11

Für welchen Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

Aufgabe 5.11

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 1$$

$$\varphi = \arccos 1 = 0^\circ$$

Aufgabe 5.12

Für welchen Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

Aufgabe 5.12

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Aufgabe 5.13

Zeige, dass für das Skalarprodukt gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

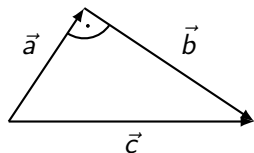
Aufgabe 5.13

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

Aufgabe 5.14

Beweise den Satz von Pythagoras mit Hilfe des Skalarprodukts.

Hinweis: Verwende die folgende Figur und $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.



Aufgabe 5.14

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\stackrel{(*)}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

(*) wegen $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Aufgabe 5.15

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.15

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 5$$

Aufgabe 5.16

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.16

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (-7) \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 0$$

Aufgabe 5.17

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.17

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 15 - 16 + 4 = 3$$

Aufgabe 5.18

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.18

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 16 + 1 + 9 = 26$$

Aufgabe 5.19

Gegeben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Aufgabe 5.19

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 7 + 0 - 15 + 8 = 0$$

Aufgabe 5.20

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.20

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = 60.26^\circ$$

Aufgabe 5.21

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.21

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \arccos \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = 60^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 5.22

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.22

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{70} \cdot \sqrt{14}} = 90^\circ$$

Aufgabe 5.23

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Zwischenwinkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Aufgabe 5.23

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{-84}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{126}} = 180^\circ$$

Aufgabe 5.24

Gegeben: $A(-9, 6, 6)$, $B(-3, 14, 8)$, $C(-7, 13, 11)$

Gesucht: alle Innenwinkel des Dreiecks ABC

Aufgabe 5.24

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.24

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{78}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{78}} = 30^\circ$$

Aufgabe 5.24

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{78}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{78}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.24

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{78}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{78}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \arccos \frac{26}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{104}} = 60^\circ$$

Aufgabe 5.24

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{78}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{78}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \arccos \frac{26}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{104}} = 60^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$$

Aufgabe 5.25

Gegeben: $A(2, 6, 3)$, $B(6, 9, 4)$, $C(4, 14, 10)$

Gesucht: alle Innenwinkel des Dreiecks ABC

Aufgabe 5.25

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.25

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = 30^\circ$$

Aufgabe 5.25

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.25

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \arccos \frac{-13}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{26}} = 108.43^\circ$$

Aufgabe 5.25

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{39}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{117}} = 30^\circ$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}|} = \arccos \frac{-13}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{26}} = 108.43^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 26.57^\circ$$

Aufgabe 5.26

Bestimme die fehlende Koordinate, so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschliessen.

Aufgabe 5.26

$$\cos 90^\circ = \frac{12 + 2z}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{26 + z^2}}$$

$$0 = 12 + 2z$$

$$z = -6$$

Aufgabe 5.27

Bestimme die fehlende Koordinate t , so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$ einen rechten Winkel einschliessen.

Aufgabe 5.27

$$\cos 90^\circ = \frac{t^2 - 7t + 12}{\sqrt{t^2 + 58} \cdot \sqrt{2t^2 + 16}}$$

$$0 = (t - 3)(t - 4)$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 4$$

Aufgabe 5.28

Bestimme die fehlende Koordinate z , so dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
einen Winkel von 45° einschliessen.

Aufgabe 5.28

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2z}{\sqrt{1 + z^2} \cdot 3}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + z^2} \cdot 3 = 2 + 4z$$

$$18(1 + z^2) = (2 + 4z)^2$$

$$18 + 18z^2 = 4 + 16z + 16z^2$$

$$2z^2 - 16z + 14 = 0$$

$$z^2 - 8z + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - 1)(z - 7) = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 7$$

Aufgabe 5.29

Für welche Werte von z schliessen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$ einen

Winkel von 60° ein?

Aufgabe 5.29

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{-1 + z}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + z^2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + z^2} = 2z - 2$$

$$2(2 + z^2) = (2z - 2)^2$$

$$4 + 2z^2 = 4z^2 - 8z + 4$$

$$0 = 2z^2 - 8z$$

$$0 = 2z(z - 4)$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 4$$

Aufgabe 5.30

Gegeben: $A(5, 9, -3)$, $B(1, 2, 5)$

Gesucht: Punkt P auf der x -Achse mit $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$

Aufgabe 5.30

$$P(x, 0, 0), \vec{PA} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{PB} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

$$(5-x)(1-x) + 18 - 16 = 0$$

$$5 - 6x + x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow P_1(2, 0, 0)$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow P_1(4, 0, 0)$$

Aufgabe 5.31

Gegeben: $A(6, 0, 4)$, $B(-5, 7, 9)$

Gesucht: Punkt P auf der y -Achse mit $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$

Aufgabe 5.31

$$P(0, y, 0), \vec{PA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -y \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{PB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 - y \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

$$-30 - y(7 - y) + 36 = 0$$

$$y^2 - 7y + 6 = 0$$

$$(y - 1)(y - 6) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 1, 0)$$

$$y_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad P_2(0, 6, 0)$$

Aufgabe 5.32

Berechne den Winkel zwischen $\vec{a} \neq \vec{0}$ und \vec{b} , wenn gilt: $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$
und $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$.

Aufgabe 5.32

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 8|\vec{b}|^2 - (3|\vec{b}|)^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{b}|^2$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-|\vec{b}|^2}{3|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{3}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109.47^\circ$$

Aufgabe 5.33

Berechne $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.33

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.33

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.33

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.34

Berechne $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.34

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.34

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.34

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.35

Berechne $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.35

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.35

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot (-6) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.35

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot (-6) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.36

Berechne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.36

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.37

Berechne $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.37

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.38

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.38

$$A = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12 \text{ FE}$$

Aufgabe 5.39

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$
aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.39

$$A = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 7 \text{ FE}$$

Aufgabe 5.40

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 5.40

$$A = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \text{ FE}$$

Aufgabe 5.41

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 5.41

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Aufgabe 5.42

Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 5.42

$$\frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13.5$$

Aufgabe 5.43

Untersuche mit Hilfe des Vektorproduktes, ob die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ kollinear sind.}$$

Aufgabe 5.43

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$$

Aufgabe 5.44

Untersuche mit Hilfe des Vektorproduktes, ob die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ kollinear sind.}$$

Aufgabe 5.44

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind nicht kollinear.}$$

Aufgabe 5.45

Ist der Wert von $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.45

eine Zahl

Aufgabe 5.46

Ist der Wert von $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.46

nicht definiert

Aufgabe 5.47

Ist der Wert von $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ ein Vektor, eine Zahl oder nicht definiert?

Aufgabe 5.47

eine Zahl

Aufgabe 5.48

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

Aufgabe 5.48

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 41$$

Aufgabe 5.48

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 41$$

$$V_{\text{Spat}} = |41| = 41$$

Aufgabe 5.49

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

Aufgabe 5.49

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -15$$

$$V_{\text{Spat}} = |-15| = 15$$

Aufgabe 5.50

Berechne das Volumen, des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Tetraeders.

Aufgabe 5.50

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -24$$

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

Aufgabe 5.51

Untersuche mit Hilfe des Spatprodukts, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ linear (un-)abhängig sind.

Aufgabe 5.51

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 5.51

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sind linear abhängig.

Aufgabe 5.52

Für welche Werte von y spannen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ einen Spat mit dem Volumen von 213 auf?

Aufgabe 5.52

$$|[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}| = 213$$

$$\left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 213$$

$$\left| \begin{pmatrix} 18 - y \\ 1 \\ 2y - 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 213$$

$$|126 - 7y + 4 - 6y + 135| = 213$$

$$|265 - 13y| = 213$$

$$265 - 13y = 213 \Rightarrow y_1 = 4$$

$$265 - 13y = -213 \Rightarrow y_2 = 478/13$$

Aufgabe 6.1

Bestimme eine Gleichung der Geraden g , die durch $A(2, 1, 3)$ und $B(5, 2, 7)$ geht.

Aufgabe 6.1

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.2

Liegt der Punkt $P(14, 11, 7)$ auf der Geraden mit der Gleichung

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 6.2

Koordinaten von P in die Geradengleichung einsetzen:

$$14 = -1 + 3t \quad 15 = 3t \quad t = 5$$

$$11 = 21 - 2t \Rightarrow -10 = -2t \Rightarrow t = 5 \Rightarrow P \notin g$$

$$7 = 12 + t \quad -5 = t \quad t = -5$$

Aufgabe 6.3

Gib eine Gleichung der Geraden h an, die parallel zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

verläuft und durch den Punkt $Q(8, 9, 4)$ geht.

Aufgabe 6.3

Einfach den Anfangspunkt von g auswechseln:

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.4

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(5, 2, 3)$ geht und parallel zur y -Achse verläuft.

Aufgabe 6.4

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.5

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(3, -4, 1)$ geht und die z -Achse bei $z = 7$ schneidet.

Aufgabe 6.5

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.6

Bestimme eine möglichst einfache Parametergleichung der Geraden, die durch die Punkte $A(5, 0, -3)$ und $B(-1, 4, 7)$ geht.

Aufgabe 6.6

Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.6

Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.7

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die parallel zur x -Achse verläuft und durch den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 1, 5)$ und $B(6, -9, 3)$ geht.

Aufgabe 6.7

$$\text{Mittelpunkt: } r_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1, -4, 4)$$

Aufgabe 6.7

$$\text{Mittelpunkt: } r_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1, -4, 4)$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.8

Bestimme eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(-2, 1, 0)$ und den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $A(1, 1, -7)$, $B(6, 4, 2)$, $C(5, -2, 8)$ geht.

Aufgabe 6.8

Schwerpunkt: $S(4, 1, 1)$

Aufgabe 6.8

Schwerpunkt: $S(4, 1, 1)$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9

Bestimme eine möglichst einfache Gleichung der Geraden, welche die Höhe h_c des Dreiecks mit den Ecken $A(1, 1, -3)$, $B(3, 4, 1)$ und $C(0, 2, 4)$ enthält.

Aufgabe 6.9

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 87 \\ 58 \\ -87 \end{pmatrix} = 29 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 87 \\ 58 \\ -87 \end{pmatrix} = 29 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h_c: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.10

Welche der Punkte $P(-2, -1, 7)$, $Q(8, 9, 8)$ und $R(4, 5, -2)$ liegen auf der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 6.10

$$-2 = 2 + 2t \quad t = -2$$

$$\blacktriangleright \begin{array}{l} -1 = 3 + 2t \\ 7 = 1 - 3t \end{array} \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P \in g$$

$$7 = 1 - 3t \quad t = -2$$

Aufgabe 6.10

$$-2 = 2 + 2t \quad t = -2$$

$$\blacktriangleright \begin{array}{l} -1 = 3 + 2t \\ 7 = 1 - 3t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = -2 \\ t = -2 \end{array} \Rightarrow P \in g$$

$$7 = 1 - 3t \quad t = -2$$

$$8 = 2 + 2t \quad t = 3$$

$$\blacktriangleright \begin{array}{l} 9 = 3 + 2t \\ 8 = 1 - 3t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 3 \\ t = -7/3 \end{array} \Rightarrow Q \notin g$$

$$8 = 1 - 3t \quad t = -7/3$$

Aufgabe 6.10

$$-2 = 2 + 2t \quad t = -2$$

$$\blacktriangleright \begin{array}{l} -1 = 3 + 2t \\ 7 = 1 - 3t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = -2 \\ t = -2 \end{array} \Rightarrow P \in g$$

$$7 = 1 - 3t \quad t = -2$$

$$8 = 2 + 2t \quad t = 3$$

$$\blacktriangleright \begin{array}{l} 9 = 3 + 2t \\ 8 = 1 - 3t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 3 \\ t = -7/3 \end{array} \Rightarrow Q \notin g$$

$$8 = 1 - 3t \quad t = -7/3$$

$$4 = 2 + 2t \quad t = 1$$

$$\blacktriangleright \begin{array}{l} 5 = 3 + 2t \\ -2 = 1 - 3t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1 \end{array} \Rightarrow R \in g$$

$$-2 = 1 - 3t \quad t = 1$$

Aufgabe 6.11

Welche spezielle Lage hat die Gerade?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 6.11

- (a) g ist parallel zur x -Achse.
- (b) g geht durch den Ursprung.
- (c) g ist parallel zur xz -Ebene (π_3).

Aufgabe 6.12

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7, 6, 3)$ geht und parallel zur Geraden

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ verl\u00e4uft.}$$

Aufgabe 6.12

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.13

Bestimme alle Spurpunkte der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.13

$S_1(3, 1, 0)$, S_2 existiert nicht, $S_3(3, 0, 2)$

Aufgabe 6.14

Im welchen Verhältnis teilt der mittlere der drei Spurpunkte der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Verbindungsstrecke zwischen den äusseren beiden Spurpunkten?

Aufgabe 6.14

$$t_1 = \frac{3}{8} = \frac{105}{280}$$

$$t_2 = \frac{1}{5} = \frac{56}{280}$$

$$t_3 = \frac{5}{7} = \frac{200}{280}$$

$$t_2 < t_1 < t_3$$

S_1 teilt die Strecke zwischen S_2 und S_3 im Verhältnis 49 : 95.

Aufgabe 6.15

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.15

- ▶ \vec{v}_h und \vec{v}_g sind kollinear ($\vec{v}_h = -3\vec{v}_g$)
- ▶ $A_g(5, 2, -2) \in h$

Die Geraden g und h sind identisch. ($g = h$)

Aufgabe 6.16

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.16

- ▶ \vec{v}_h und \vec{v}_g sind kollinear ($\vec{v}_h = 2\vec{v}_g$)
- ▶ $A_g(-2|0|-2) \notin h$

Die Geraden g und h sind parallel. ($g \parallel h$)

Aufgabe 6.17

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.17

- ▶ \vec{v}_h und \vec{v}_g sind nicht kollinear
- ▶ Das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat genau eine Lösung: $s = -3$, $t = 2$.

Die Geraden schneiden sich

Aufgabe 6.18

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.18

- ▶ \vec{v}_h und \vec{v}_g sind nicht kollinear
- ▶ das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat keine Lösung.

g und h sind windschief

Aufgabe 6.19

Zeige, dass sich die Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$5 + 2s = 2 - t$$

$$5 + s = 2 + t$$

$$2s = -5 + t$$

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$5 + 2s = 2 - t \qquad 2s + t = -3$$

$$5 + s = 2 + t \quad \Rightarrow \quad s - t = -3$$

$$2s = -5 + t \qquad 2s - t = -5$$

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Schnittwinkel:

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Schnittwinkel:

φ

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Aufgabe 6.19

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2s = 2 - t & & 2s + t = -3 \\ 5 + s = 2 + t & \Rightarrow & s - t = -3 \\ 2s = -5 + t & & 2s - t = -5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 1 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(1, 3, -4)$

Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}} = 78.90^\circ$$

Aufgabe 6.20

Zeige, dass sich die Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

scheiden und bestimme den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.20

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{array}{rcl} -3 + 3s = -16 + 8t & & 3s - 8t = -13 \\ 5 - 5s = -6 + 3t & \Rightarrow & -5s - 3t = -11 \\ -2 + 9s = 9 - t & & 9s + t = 11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = 1 \\ t = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(0, 0, 7)$

spitzer Schnittwinkel:

φ

Aufgabe 6.20

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{array}{rcl} -3 + 3s = -16 + 8t & & 3s - 8t = -13 \\ 5 - 5s = -6 + 3t & \Rightarrow & -5s - 3t = -11 \\ -2 + 9s = 9 - t & & 9s + t = 11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = 1 \\ t = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(0, 0, 7)$

spitzer Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}$$

Aufgabe 6.20

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{array}{rcl} -3 + 3s = -16 + 8t & & 3s - 8t = -13 \\ 5 - 5s = -6 + 3t & \Rightarrow & -5s - 3t = -11 \\ -2 + 9s = 9 - t & & 9s + t = 11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = 1 \\ t = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(0, 0, 7)$

spitzer Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}}$$

Aufgabe 6.20

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{array}{rcl} -3 + 3s = -16 + 8t & & 3s - 8t = -13 \\ 5 - 5s = -6 + 3t & \Rightarrow & -5s - 3t = -11 \\ -2 + 9s = 9 - t & & 9s + t = 11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = 1 \\ t = 2 \end{array}$$

Schnittpunkt: $S(0, 0, 7)$

spitzer Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}} = 90^\circ$$

Aufgabe 6.21

Die Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 5, -2)$ und $B(5, -1, 4)$ ist in drei gleiche Teile zu zerlegen. Ermittle die Koordinaten der Teilungspunkte.

Aufgabe 6.21

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.21

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_1(-1, 3, 0)$$

Aufgabe 6.21

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T_1(-1, 3, 0)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T_2(2, 1, 2)$$

Aufgabe 6.22

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0, 3, 7)$ von der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und den Fusspunkt F des Lots von P auf g .

Aufgabe 6.22

\overrightarrow{AF}

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.22

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

\vec{r}_F

Aufgabe 6.22

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \overrightarrow{AF}$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2, 0, 1)$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2, 0, 1)$$

$$d(P, g) = |\vec{r}_F - \vec{r}_P|$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2, 0, 1)$$

$$d(P, g) = |\vec{r}_F - \vec{r}_P| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right|$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2, 0, 1)$$

$$d(P, g) = |\vec{r}_F - \vec{r}_P| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|$$

Aufgabe 6.22

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \vec{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-2, 0, 1)$$

$$d(P, g) = |\vec{r}_F - \vec{r}_P| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = 7$$

Aufgabe 6.23

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.23

$$\vec{v}_g \times \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix}; \vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$d(g, h) = \frac{|(\vec{v}_g \times \vec{v}_h) \cdot \vec{AB}|}{|\vec{v}_g \times \vec{v}_h|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{490}{49} = 10$$

Aufgabe 6.24

Zeige, dass sich die beiden Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

schneiden und bestimme die Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden.

Aufgabe 6.24

Schnittpunkt: $S(5, 8, 1)$

$$w_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.25

Bestimme eine Gleichung der Geraden h , die orthogonal zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht und durch den Punkt $P(5, 8, 1)$ geht.

Aufgabe 6.25

Der Richtungsvektor \vec{v}_h des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor \vec{v}_g und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

Aufgabe 6.25

Der Richtungsvektor \vec{v}_h des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor \vec{v}_g und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.25

Der Richtungsvektor \vec{v}_h des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor \vec{v}_g und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times (\vec{v}_g \times \overrightarrow{AP}) = \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.25

Der Richtungsvektor \vec{v}_h des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor \vec{v}_g und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times (\vec{v}_g \times \vec{AP}) = \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.26

Bestimme die Gleichung der Normalprojektion der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

auf die xy -Ebene.

Aufgabe 6.26

Durch die Projektion auf die xy -Ebene werden alle z -Komponenten zu Null.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.27

Welche Punkte auf der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
haben vom Punkt $Q(1, -2, 3)$ den Abstand $d = 3$?

Aufgabe 6.27

$$P(6 - 3t, -8 + 4t, 3 + t) \in g$$

Aufgabe 6.27

$$P(6 - 3t, -8 + 4t, 3 + t) \in g$$

$$|\overrightarrow{QP}| = 3$$

Aufgabe 6.27

$$P(6 - 3t, -8 + 4t, 3 + t) \in g$$

$$|\overrightarrow{QP}| = 3$$

$$\left| \begin{pmatrix} 6 - 3t \\ -8 + 4t \\ 3 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

Aufgabe 6.27

$$P(6 - 3t, -8 + 4t, 3 + t) \in g$$

$$|\overrightarrow{QP}| = 3$$

$$\left| \begin{pmatrix} 6 - 3t \\ -8 + 4t \\ 3 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$\left| \begin{pmatrix} 5 - 3t \\ -6 + 4t \\ t \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -4, 4)$$

$$\sqrt{(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2} = 3$$

$$(5 - 3t)^2 + (-6 + 4t)^2 + t^2 = 9$$

$$25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 = 9$$

$$26t^2 - 78t + 52 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -4, 4)$$

$$t_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 0, 5)$$

Aufgabe 6.28

Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig durch den Raum. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkt $A(-6, -4, -9)$ und 10 Sekunden später im Punkt $B(24, 16, 1)$.

- (a) Gib eine Parametergleichung der Bahn an?
- (b) Wo befindet sich der Körper zur Zeit $t = 15$ s?
- (c) Wann hat der Körper vom Ursprung eine Entfernung von 7 m?

(Es gilt $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ m.)

Aufgabe 6.28

$$(a) \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.28

$$(a) \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.28

$$(a) \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 26 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow C(39, 26, 6)$$

(c)

$$|\vec{OP}| = 7$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad \|\|^2$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad \|\|^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad ||^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

$$133 - 70t + 14t^2 = 49$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad ||^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

$$133 - 70t + 14t^2 = 49$$

$$14t^2 - 70t + 84 = 0$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad ||^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

$$133 - 70t + 14t^2 = 49$$

$$14t^2 - 70t + 84 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

(c)

$$|\overrightarrow{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad ||^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

$$133 - 70t + 14t^2 = 49$$

$$14t^2 - 70t + 84 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

(c)

$$|\vec{OP}| = 7$$

$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 + 3t \\ -4 + 2t \\ -9 + t \end{pmatrix} \right| = 7$$

$$\sqrt{(-6 + 3t)^2 + (-4 + 2t)^2 + (-9 + t)^2} = 7 \quad ||^2$$

$$36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 = 49$$

$$133 - 70t + 14t^2 = 49$$

$$14t^2 - 70t + 84 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

nach $t = 2$ und $t = 3$ Sekunden

Aufgabe 7.1

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Punkte A , B und C enthält.

(a) $A(4, 0, 8)$, $B(4, -5, 9)$, $C(4, 0, 2)$

(b) $A(4, 9, 2)$, $B(-6, 4, 4)$, $C(-2, 6, 3)$

(c) $A(3, -8, 0)$, $B(8, 4, -8)$, $C(4, -1, 3)$

(d) $A(-5, 7, 4)$, $B(3, -2, 2)$, $C(3, 0, -2)$

Aufgabe 7.1

$$(a) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.1

$$(a) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -4$$

Aufgabe 7.1

$$(a) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -4$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$$

Aufgabe 7.1

$$(a) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -4$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$$

$$\varepsilon: x - 4 = 0$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 14$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 14$$

$$\varepsilon: x - 2y + 14 = 0$$

$$(c) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -20$$

$$(c) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -20$$

$$\varepsilon: 4x - y + z - 20 = 0$$

$$(d) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -11$$

$$(d) \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -11$$

$$\varepsilon: 5x + 4y + 2z - 11 = 0$$

Aufgabe 7.2

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g gegeben ist.

$$(a) P(3, -2, 0) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) (3, -2, 0), \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$$

$$\varepsilon: 2x + 2y + z - 2 = 0$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$$

$$\varepsilon: 2x + 2y + z - 2 = 0$$

$$(b) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -47 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$$

$$\varepsilon: 2x + 2y + z - 2 = 0$$

$$(b) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -47 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -50$$

Aufgabe 7.2

$$(a) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$$

$$\varepsilon: 2x + 2y + z - 2 = 0$$

$$(b) \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -47 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -50$$

$$\varepsilon: 2x - 22y - 47z - 50 = 0$$

Aufgabe 7.3

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die parallelen Geraden g und h definiert ist.

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \quad \overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \quad \overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$$

$$\varepsilon: 3x + 4y - 5z + 1 = 0$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$$

$$\varepsilon: 3x + 4y - 5z + 1 = 0$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \quad \overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$$

$$\varepsilon: 3x + 4y - 5z + 1 = 0$$

$$(b) \quad \overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -5$$

Aufgabe 7.3

$$(a) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$$

$$\varepsilon: 3x + 4y - 5z + 1 = 0$$

$$(b) \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -5$$

$$\varepsilon: 9x + 5y + 2z - 5 = 0$$

Aufgabe 7.4

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene,

- (a) die parallel zur xy -Ebene ist und den Punkt $P(5, 3, -6)$ enthält.
- (a) die parallel zur xz -Ebene ist und den Punkt $P(7, 9, 1)$ enthält.

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$$

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$$

$$\varepsilon: z + 6 = 0$$

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$$

$$\varepsilon: z + 6 = 0$$

(b) Parallel zur xz -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$$

$$\varepsilon: z + 6 = 0$$

(b) Parallel zur xz -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = -9$$

Aufgabe 7.4

(a) Parallel zur xy -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$$

$$\varepsilon: z + 6 = 0$$

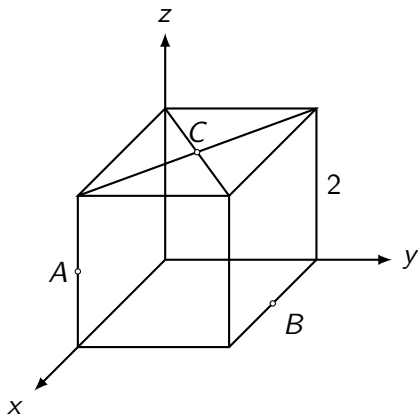
(b) Parallel zur xz -Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = -9$$

$$\varepsilon: y - 9 = 0$$

Aufgabe 7.5

Im unten dargestellten Würfel sind A und B Kantenmittelpunkte. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ABC ?



Aufgabe 7.5

$A(2, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(1, 1, 2)$

Aufgabe 7.5

$A(2, 0, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(1, 1, 2)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.5

$$A(2, 0, 1), B(1, 2, 0), C(1, 1, 2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -7$$

Aufgabe 7.5

$$A(2, 0, 1), B(1, 2, 0), C(1, 1, 2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -7$$

$$3x + 2y + z - 7 = 0$$

Aufgabe 7.6

Bestimme die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zum Vektor \vec{v} steht und durch den Punkt P geht.

$$(a) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P(2, 8, -5)$$

$$(b) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P(4, 0, 3)$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 5$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 5$$

$$\varepsilon: x + y + 3z + 5 = 0$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 5$$

$$\varepsilon: x + y + 3z + 5 = 0$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 5$$

$$\varepsilon: x + y + 3z + 5 = 0$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -23$$

Aufgabe 7.6

$$(a) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 5$$

$$\varepsilon: x + y + 3z + 5 = 0$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}; d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -23$$

$$\varepsilon: 2x + 7y + 5z - 23 = 0$$

Aufgabe 7.7

Zeige, dass sich die beiden Geraden schneiden und bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch g und h aufgespannt wird.

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.7

- (a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

Aufgabe 7.7

- (a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.7

- (a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -8$$

Aufgabe 7.7

- (a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -8$$

$$\varepsilon: z - 8 = 0$$

$$(b) \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$(b) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 10$$

$$(b) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 10$$

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 10 = 0$$

$$(c) \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$(c) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 16$$

$$(c) \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g \cap h \neq \{\}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 16$$

$$\varepsilon: 8x + 12y - 3z - 16 = 0$$

Aufgabe 7.8

Beschreibe die spezielle Lage der Ebene.

(a) $\varepsilon: z = 2y - 1$

(b) $\varepsilon: y = -x + 4$

(c) $\varepsilon: 2x + 3z - 4 = 0$

(d) $\varepsilon: x = 3$

(e) $\varepsilon: z = -1$

(f) $\varepsilon: y = 0$

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz -Ebene)

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz -Ebene)

$$(b) \quad \varepsilon: x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz -Ebene)

$$(b) \quad \varepsilon: x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erstprojizierend (senkrecht zur xy -Ebene)

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz -Ebene)

$$(b) \quad \varepsilon: x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erstprojizierend (senkrecht zur xy -Ebene)

$$(c) \quad \varepsilon: 2x + 3z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8

$$(a) \quad \varepsilon: 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz -Ebene)

$$(b) \quad \varepsilon: x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erstprojizierend (senkrecht zur xy -Ebene)

$$(c) \quad \varepsilon: 2x + 3z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

drittprojizierend (senkrecht zur xz -Ebene)

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zweite Hauptebene (parallel zur yz -Ebene)

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zweite Hauptebene (parallel zur yz -Ebene)

$$(e) \quad z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zweite Hauptebene (parallel zur yz -Ebene)

$$(e) \quad z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erste Hauptebene (parallel zur xy -Ebene)

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zweite Hauptebene (parallel zur yz -Ebene)

$$(e) \quad z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erste Hauptebene (parallel zur xy -Ebene)

$$(f) \quad \varepsilon: y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \varepsilon: x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zweite Hauptebene (parallel zur yz -Ebene)

$$(e) \quad z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erste Hauptebene (parallel zur xy -Ebene)

$$(f) \quad \varepsilon: y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

xz -Ebene

Aufgabe 7.9

Berechne die Achsenabschnitte der Ebene.

(a) $\varepsilon: 2x - 3y + z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon: 3y - 4z + 12 = 0$

(c) $\varepsilon: 4x + 5y - 2z + 10 = 0$

(d) $\varepsilon: x - 4y + 3z = 0$

Aufgabe 7.9

- (a) $a = 3, b = -2, c = 6$
- (b) $b = -4, c = 3$
- (c) $a = -2.5, b = -2, c = 5$
- (d) $a = b = c = 0$

Aufgabe 7.10

Berechne formal eine Ebenengleichung aus den Achsenabschnitten $x = a$, $y = b$ und $z = c$ und dividiere das Ergebnis durch abc .

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_a = - \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -abc$$

$$\varepsilon: bcx + acy + abz - abc = 0 \quad || : abc$$

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0 \quad (\text{Achsenabschnittsform})$$

Aufgabe 7.11

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch ihre Achsenabschnitte gegeben ist.

(a) $a = 2, b = 2, c = 3$

(c) $a = 1, b = -4, c = 2$

(b) $a = 3, c = -7$

(d) $a = b = c = 0$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

$$(a) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 3x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

$$(a) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 3x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$(b) \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{\infty} - \frac{z}{7} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 7x - 3z - 21 = 0$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

$$(a) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 3x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$(b) \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{\infty} - \frac{z}{7} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 7x - 3z - 21 = 0$$

$$(c) \quad \frac{x}{1} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 4x - y + 2z - 4 = 0$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

$$(a) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 3x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$(b) \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{\infty} - \frac{z}{7} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 7x - 3z - 21 = 0$$

$$(c) \quad \frac{x}{1} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 4x - y + 2z - 4 = 0$$

(d) Bei Ebenen, die durch den Ursprung gehen, d. h. $d = 0$ gilt, ist die Achsenabschnittsform nicht definert.

Aufgabe 7.12

Stelle die Gleichung der Ebene in der Koordinatenform dar.

$$(a) \quad \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.12

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Aufgabe 7.12

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

Aufgabe 7.12

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\varepsilon: 7x - 3y - 5z - 25 = 0$$

Aufgabe 7.12

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\varepsilon: 7x - 3y - 5z - 25 = 0$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{n}$$

Aufgabe 7.12

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\varepsilon: 7x - 3y - 5z - 25 = 0$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 139$$

Aufgabe 7.12

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\varepsilon: 7x - 3y - 5z - 25 = 0$$

$$(b) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} = -\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = - \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 139$$

$$\varepsilon: 5x + 18y - 4z + 139 = 0$$

Aufgabe 7.13

Stelle die Gleichung der Ebene in der Parameterform dar.

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon: 4y - z + 7 = 0$

(c) $\varepsilon: 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

(d) $\varepsilon: 3z - 5 = 0$

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Damit lassen sich x , y und z durch s und t darstellen:

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Damit lassen sich x , y und z durch s und t darstellen:

$$x = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$

$$y = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

$$z = 6 - 5 \cdot s + 2 \cdot t$$

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Damit lassen sich x , y und z durch s und t darstellen:

$$x = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$

$$y = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

$$z = 6 - 5 \cdot s + 2 \cdot t$$

und somit:

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $5s - 2t + z - 6 = 0$

Damit lassen sich x , y und z durch s und t darstellen:

$$x = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$

$$y = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

$$z = 6 - 5 \cdot s + 2 \cdot t$$

und somit:

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon: 4y - z + 7 = 0$

(b) $\varepsilon: 4y - z + 7 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 7 + 4t$

(b) $\varepsilon: 4y - z + 7 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 7 + 4t$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c) $\varepsilon: 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

(c) $\varepsilon: 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

Setze $y = s$ und $z = t$: $x = -0.5 - 2y + 3t$

(c) $\varepsilon: 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

Setze $y = s$ und $z = t$: $x = -0.5 - 2y + 3t$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder setze $x = s$ und $y = t$: $z = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

und mit viel Kosmetik:

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) $\varepsilon: 3z - 5 = 0$

(d) $\varepsilon: 3z - 5 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 5/3$

(d) $\varepsilon: 3z - 5 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 5/3$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.14

Bestimme die Parametergleichungen der Spuren der Ebene.

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0): x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0): x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0, y, 0): -3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0): x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0, y, 0): -3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

z-Achsenabschnitt: $C(0, 0, z): 2z - 6 = 0 \Rightarrow C(0, 0, 3)$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0): x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0, y, 0): -3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

z-Achsenabschnitt: $C(0, 0, z): 2z - 6 = 0 \Rightarrow C(0, 0, 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0): x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0, y, 0): -3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

z-Achsenabschnitt: $C(0, 0, z): 2z - 6 = 0 \Rightarrow C(0, 0, 3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : s_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$

x-Achsenabschnitt: $A(x, 0, 0): x - 6 = 0 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

y-Achsenabschnitt: $B(0, y, 0): -3y - 6 = 0 \Rightarrow B(0, -2, 0)$

z-Achsenabschnitt: $C(0, 0, z): 2z - 6 = 0 \Rightarrow C(0, 0, 3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : s_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

▶ 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

▶ 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

$$x = t: y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

▶ 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

$$x = t: y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▶ 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

▶ 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

$$x = t: y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▶ 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

$$z = t: y = -5 + \frac{5}{3}t \quad \Rightarrow \quad s_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

▶ 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

$$x = t: y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▶ 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

$$z = t: y = -5 + \frac{5}{3}t \quad \Rightarrow \quad s_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

▶ 3. Spur ($y = 0$): $5z - 15 = 0$

(b) $\varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$

▶ 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

$$x = t: y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▶ 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

$$z = t: y = -5 + \frac{5}{3}t \quad \Rightarrow \quad s_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

▶ 3. Spur ($y = 0$): $5z - 15 = 0$

$$x = t: z = 3 \quad \Rightarrow \quad s_3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

Liegt der Punkt P in der Ebene ε ?

(a) $\varepsilon: 3x - 2y - 5z + 11 = 0; P(5, -2, 6)$

(b) $\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}; P(2, 4, 1)$

Aufgabe 7.15

$$(a) \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

Aufgabe 7.15

$$(a) \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

Aufgabe 7.15

$$(a) \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

$$(a) \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 = -s + 4t \quad (1)$$

$$2 = 2s - 4t \quad (2)$$

$$3 = 2s - 3t \quad (3)$$

Aufgabe 7.15

$$(a) \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 = -s + 4t \quad (1)$$

$$2 = 2s - 4t \quad (2)$$

$$3 = 2s - 3t \quad (3)$$

aus (1) und (2) folgt $s = 3$ und $t = 1$

Aufgabe 7.15

$$(a) \quad 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1 = -s + 4t \quad (1)$$

$$2 = 2s - 4t \quad (2)$$

$$3 = 2s - 3t \quad (3)$$

aus (1) und (2) folgt $s = 3$ und $t = 1$

Einsetzen in (3) ergibt: $0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Aufgabe 7.16

In der Ebene $\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$ ist ein Punkt P zu bestimmen,

- (a) der auf der z -Achse liegt,
- (b) der drei gleiche Koordinaten hat,
- (c) der den Grundriss $P'(1, -5, 0)$ besitzt,
- (d) der den Seitenriss $P'''(2, 0, 4)$ besitzt,

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon:$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon$:

$$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon:$

$$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon:$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon:$

$$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon:$

$$3t - 2t + t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, 2, 2)$$

(c) $P(1, -5, z) \in \varepsilon$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon:$

$$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon:$

$$3t - 2t + t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, 2, 2)$$

(c) $P(1, -5, z) \in \varepsilon$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -9 \quad \Rightarrow \quad P(1, -5, -9)$$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon:$

$$z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow P(0, 0, 4)$$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon:$

$$3t - 2t + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow P(2, 2, 2)$$

(c) $P(1, -5, z) \in \varepsilon$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + z - 4 = 0 \Rightarrow z = -9 \Rightarrow P(1, -5, -9)$$

(d) $P(2, y, 4) \in \varepsilon$

Aufgabe 7.16

$$\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon:$

$$z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow P(0, 0, 4)$$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon:$

$$3t - 2t + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow P(2, 2, 2)$$

(c) $P(1, -5, z) \in \varepsilon$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + z - 4 = 0 \Rightarrow z = -9 \Rightarrow P(1, -5, -9)$$

(d) $P(2, y, 4) \in \varepsilon$

$$3 \cdot 2 - 2y + 4 - 4 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow P(2, 3, 4)$$

Aufgabe 7.17

Ist das Viereck $ABCD$ mit $A(3, -1, 2)$ $B(4, 0, 1)$ $C(1, 5, 3)$ und $D(-2, 0, 6)$ eben oder nicht?

Aufgabe 7.17

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.17

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.17

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.17

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte liegen nicht in einer Ebene.

Aufgabe 7.18

Bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen.

▶ $\varepsilon_1: 3x - 2y + z - 8 = 0$

▶ $\varepsilon_2: x + y - 3z + 4 = 0$

▶ $\varepsilon_3: 4x + 3y - 5z - 8 = 0$

Aufgabe 7.18

$$3x - 2y + z = 8$$

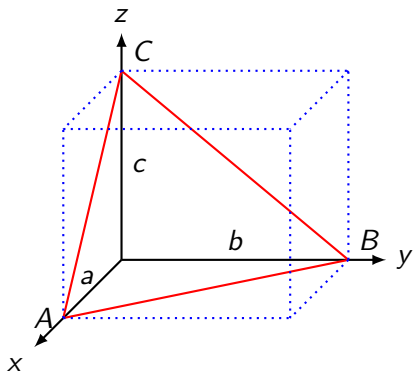
$$x + y - 3z = -4 \quad \Rightarrow \quad S(4, 4, 4)$$

$$4x + 3y - 5z = 8$$

Aufgabe 7.19

Die Ebene $\varepsilon: 9x + 16y + pz - 144 = 0$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A , B und C . Bestimme p , so dass die Pyramide $OABC$ mit dem Koordinatenursprung O als vierte Ecke, das Volumen $V = 384$ besitzt.

Aufgabe 7.19



Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$V = \frac{1}{6}|abc|$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$V = \frac{1}{6} |abc|$$

$$384 = \frac{1}{6} \left| 16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p} \right|$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$V = \frac{1}{6} |abc|$$

$$384 = \frac{1}{6} \left| 16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p} \right|$$

$$384 \cdot |p| = 8 \cdot 3 \cdot 144$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$V = \frac{1}{6} |abc|$$

$$384 = \frac{1}{6} \left| 16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p} \right|$$

$$384 \cdot |p| = 8 \cdot 3 \cdot 144$$

$$|p| = 9$$

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$$A(a, 0, 0) \Rightarrow a = 16$$

$$B(0, b, 0) \Rightarrow b = 9$$

$$C(0, 0, c) \Rightarrow c = 144/p$$

Sind a , b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$V = \frac{1}{6} |abc|$$

$$384 = \frac{1}{6} \left| 16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p} \right|$$

$$384 \cdot |p| = 8 \cdot 3 \cdot 144$$

$$|p| = 9$$

$$p = \pm 9$$

Aufgabe 7.20

Beschreibe die besondere Lage der Ebenen im \mathbb{R}^3 .

(a) $\varepsilon: 2y - z - 1 = 0$

(c) $\varepsilon: y = 4 - x$

(b) $\varepsilon: 5x - 2y + 7z = 0$

(d) $\varepsilon: z = 3$

Aufgabe 7.20

- (a) $\varepsilon: 2y - z - 1 = 0$ Ebene parallel zur x -Achse
- (b) $\varepsilon: 5x - 2y + 7z = 0$ Ebene durch den Ursprung
- (c) $\varepsilon: y = 4 - x$ Ebene parallel zur z -Achse
- (d) $\varepsilon: z = 3$ Ebene parallel zur xy -Ebene

Aufgabe 7.21

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene ε .

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: 3x + 8y + 4z + 8 = 0$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: -3x + 7y + 9z - 5 = 0$$

$$(c) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: 9x - 4y + 6z - 5 = 0$$

$$(d) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: x + 4y - 2z - 2 = 0$$

Aufgabe 7.21

(a) $t_0 = 1, S(4, -6, 7)$

(b) $g \parallel \varepsilon$

(c) $t_0 = 4, S(41, 31, -40)$

(d) $g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.22

Bestimme den Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Ebene E .

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.22

$$(a) \quad 1 + 2t = 9 - 7r + 5s$$

$$1 + t = 2 + 4r - 8s$$

$$3 - t = 6 + 6r + 2s$$

Aufgabe 7.22

$$(a) \quad 1 + 2t = 9 - 7r + 5s$$

$$1 + t = 2 + 4r - 8s$$

$$3 - t = 6 + 6r + 2s$$

$$2t + 7r - 5s = 8 \quad t = 5$$

$$t - 4r + 8s = 1 \quad \Rightarrow \quad r = -1$$

$$-t - 6r - 2s = 3 \quad s = -1$$

Aufgabe 7.22

$$(a) \quad 1 + 2t = 9 - 7r + 5s$$

$$1 + t = 2 + 4r - 8s$$

$$3 - t = 6 + 6r + 2s$$

$$2t + 7r - 5s = 8 \quad t = 5$$

$$t - 4r + 8s = 1 \quad \Rightarrow \quad r = -1$$

$$-t - 6r - 2s = 3 \quad s = -1$$

$t = 5$ in g einsetzen: $S(11, 6, -2)$

$$(b) \quad 5 + 6t = 8 + 2r + 5s$$

$$7 + 8t = -4 - 4r + 5s$$

$$1 + 7t = 5 + 7r + 7s$$

$$(b) \quad 5 + 6t = 8 + 2r + 5s$$

$$7 + 8t = -4 - 4r + 5s$$

$$1 + 7t = 5 + 7r + 7s$$

$$6t - 2r - 5s = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$8t + 4r - 5s = -11$$

$$7t - 7r - 7s = 4$$

$$(b) \quad 5 + 6t = 8 + 2r + 5s$$

$$7 + 8t = -4 - 4r + 5s$$

$$1 + 7t = 5 + 7r + 7s$$

$$6t - 2r - 5s = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$$8t + 4r - 5s = -11$$

$$7t - 7r - 7s = 4$$

$$g \parallel \varepsilon$$

$$(c) \quad 1 + 6t = 3 + 0r + 4s$$

$$0 - 9t = 5 + 3r - 5s$$

$$7 + 8t = -1 - 4r + 4s$$

$$(c) \quad 1 + 6t = 3 + 0r + 4s$$

$$0 - 9t = 5 + 3r - 5s$$

$$7 + 8t = -1 - 4r + 4s$$

$$6t + 0r - 4s = 2$$

$$-9t - 3r + 5s = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{unendliche viele Lösungen}$$

$$8t + 4r - 4s = -8$$

$$(c) \quad 1 + 6t = 3 + 0r + 4s$$

$$0 - 9t = 5 + 3r - 5s$$

$$7 + 8t = -1 - 4r + 4s$$

$$6t + 0r - 4s = 2$$

$$-9t - 3r + 5s = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{unendliche viele Lösungen}$$

$$8t + 4r - 4s = -8$$

$$g \subset \varepsilon$$

Aufgabe 7.23

Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

(a) $\varepsilon_1: 4x + 2y + 5z + 5 = 0$; $\varepsilon_2: 6x + 4y + 9z - 7 = 0$

(b) $\varepsilon_1: x + y + 3 = 0$; $\varepsilon_2: 5x + 8y + 3z - 3 = 0$

Aufgabe 7.23

$$(a) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.23

$$(a) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y + 5z + 5 = 0$$

$$6x + 4y + 9z - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad P(-11, 7, 5)$$

$$x + 3y - 2z + 0 = 0$$

Aufgabe 7.23

$$(a) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y + 5z + 5 = 0$$

$$6x + 4y + 9z - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad P(-11, 7, 5)$$

$$x + 3y - 2z + 0 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$5x + 8y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow P(-4, 1, 5)$$

$$x - y + z + 0 = 0$$

$$(b) \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$5x + 8y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow P(-4, 1, 5)$$

$$x - y + z + 0 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.24

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ , die parallel zur Ebene ε ist und durch den Punkt P geht.

(a) $\varepsilon: 2x - 3y + 5z + 4 = 0; P(1, 1, 1)$

(b) $\varepsilon: 7x + 2y - 8z + 9 = 0; P(3, -2, 4)$

Aufgabe 7.24

$$(a) \quad 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4$$

Aufgabe 7.24

$$(a) \quad 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4$$

$$\delta: 2x - 3y + 5z - 4 = 0;$$

$$(b) \quad 7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 8 \cdot 4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 15$$

Aufgabe 7.24

$$(a) \quad 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4$$

$$\delta: 2x - 3y + 5z - 4 = 0;$$

$$(b) \quad 7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 8 \cdot 4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 15$$

$$\delta: 7x + 2y - 8z + 15 = 0;$$

Aufgabe 7.25

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ , die senkrecht zur Gerade g ist und durch den Punkt P geht.

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; P(5, 1, 9)$$

Aufgabe 7.25

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ , die senkrecht zur Gerade g ist und durch den Punkt P geht.

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; P(5, 1, 9)$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P(4, 0, -5)$$

Aufgabe 7.25

$$(a) \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.25

$$(a) \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

Aufgabe 7.25

$$(a) \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

$$\delta: x + 3y - z + 1 = 0$$

Aufgabe 7.25

$$(a) \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

$$\delta: x + 3y - z + 1 = 0$$

$$(b) 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3$$

Aufgabe 7.25

$$(a) \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

$$\delta: x + 3y - z + 1 = 0$$

$$(b) 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3$$

$$\delta: 2x - y - 3 = 0$$

Aufgabe 7.26

Bestimme eine Gleichung der Mittelnormalebene der Strecke AB .

(a) $A(2, 4, 1)$, $B(6, -8, 7)$

(b) $A(5, -5, 4)$, $B(5, 9, 2)$

Aufgabe 7.26

$$(a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

Aufgabe 7.26

$$(a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.26

$$(a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -32$$

Aufgabe 7.26

$$(a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -32$$

$$\mu: 2x - 6y + 3z - 32 = 0$$

$$(b) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$(b) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -11$$

$$(b) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -11$$

$$\mu: 7y - z - 11 = 0$$

Aufgabe 7.27

Welcher Punkt auf der Geraden g hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A(-1, 2, 1), \quad B(3, 4, -7)$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A(-3, 6, 5), \quad B(5, 2, -3)$$

Aufgabe 7.27

(a) $M_{AB} = (1, 3, -3);$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$$

$$\mu: 2x + y - 4z - 17 = 0 \text{ (Mittelnormalebene)}$$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$$

$$\mu: 2x + y - 4z - 17 = 0 \text{ (Mittelnormalebene)}$$

$$\mu \cap g:$$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$$

$$\mu: 2x + y - 4z - 17 = 0 \text{ (Mittelnormalebene)}$$

$$\mu \cap g: 2(3 + t) + (-2 - t) - 4(2 + 2t) - 17 = 0$$

$$-21 - 7t = 0$$

$$t = -3$$

Aufgabe 7.27

$$(a) M_{AB} = (1, 3, -3); \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -17$$

$$\mu: 2x + y - 4z - 17 = 0 \text{ (Mittelnormalebene)}$$

$$\mu \cap g: 2(3 + t) + (-2 - t) - 4(2 + 2t) - 17 = 0$$

$$-21 - 7t = 0$$

$$t = -3$$

$$P(0, 1, -4)$$

(b) $M_{AB} = (1, 4, 1)$;

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\mu: 2x - y - 2z + 4 = 0$$

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\mu: 2x - y - 2z + 4 = 0$$

$\mu \cap g$:

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\mu: 2x - y - 2z + 4 = 0$$

$$\mu \cap g: 2(-1 - t) - (4 + 2t) - 2(5 + t) + 4 = 0$$

$$-12 - 6t = 0$$

$$t = -2$$

$$(b) M_{AB} = (1, 4, 1); \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\mu: 2x - y - 2z + 4 = 0$$

$$\mu \cap g: 2(-1 - t) - (4 + 2t) - 2(5 + t) + 4 = 0$$

$$-12 - 6t = 0$$

$$t = -2$$

$$P(-2, -16, -10)$$

Aufgabe 7.28

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte P und Q geht und normal zur Ebene ε steht.

(a) $P(1, 3, 0)$, $Q(3, 2, 1)$; $\varepsilon: 4x + 3y - 2 = 0$

(b) $P(2, 0, 1)$, $Q(-3, -4, 2)$; $\varepsilon: 3x + y + 7z - 2 = 0$

Aufgabe 7.28

$$(a) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 7.28

$$(a) \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.28

$$(a) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

Aufgabe 7.28

$$(a) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -(-3 + 12) = -9$$

Aufgabe 7.28

$$(a) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -(-3 + 12) = -9$$

$$\delta: 3x - 4y - 10z + 9 = 0$$

Aufgabe 7.28

$$(b) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 7.28

$$(b) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.28

$$(b) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

Aufgabe 7.28

$$(b) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 51$$

Aufgabe 7.28

$$(b) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{n}_\epsilon = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = - \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 51$$

$$\delta: 29x - 38y - 7z - 51 = 0$$

Aufgabe 7.29

Der Punkt P wird an der Ebene ε gespiegelt. Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes P' .

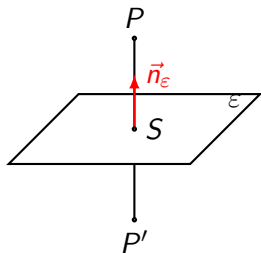
(a) $P(0, 4, -5)$, $\varepsilon: 4x - 3y + z + 4 = 0$

(b) $P(4, 0, -2)$, $\varepsilon: x - 2y + 3z - 5 = 0$

(c) $P(-1, -6, 17)$, $\varepsilon: 3x - 8z - 7 = 0$

Aufgabe 7.29

Lösungsidee: Lege eine zu ε normale Gerade durch P , schneide sie mit ε und verdopple den Wert des Parameters t , um direkt vom Punkt P zum Punkt P' zu gelangen.



$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 4(0 + 4t) - 3(4 - 3t) + (-5 + t) + 4 = 0$$

$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 4(0 + 4t) - 3(4 - 3t) + (-5 + t) + 4 = 0$$

$$26t - 13 = 0$$

$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 4(0 + 4t) - 3(4 - 3t) + (-5 + t) + 4 = 0$$

$$26t - 13 = 0$$

$$t = 0.5$$

$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 4(0 + 4t) - 3(4 - 3t) + (-5 + t) + 4 = 0$$

$$26t - 13 = 0$$

$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(a) \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 4(0 + 4t) - 3(4 - 3t) + (-5 + t) + 4 = 0$$

$$26t - 13 = 0$$

$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(4, 1, -4)$$

$$(b) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 1 \cdot (4 + t) - 2 \cdot (-2t) + 3 \cdot (-2 + 3t) - 5 = 0$$

$$-7 + 14t = 0$$

$$t = 0.5$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 1 \cdot (4 + t) - 2 \cdot (-2t) + 3 \cdot (-2 + 3t) - 5 = 0$$

$$-7 + 14t = 0$$

$$t = 0.5$$

$$(b) \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 1 \cdot (4 + t) - 2 \cdot (-2t) + 3 \cdot (-2 + 3t) - 5 = 0$$

$$-7 + 14t = 0$$

$$t = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(5, -2, 1)$$

$$(c) \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$(c) \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 3 \cdot (-1 + 3t) - 8 \cdot (17 - 8t) - 7 = 0$$

$$-146 + 73t = 0$$

$$t = 2$$

$$(c) \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 3 \cdot (-1 + 3t) - 8 \cdot (17 - 8t) - 7 = 0$$

$$-146 + 73t = 0$$

$$t = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

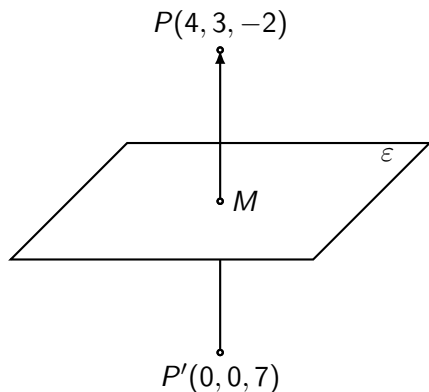
$$P'(11, -6, -15)$$

Aufgabe 7.30

Der Punkt $P'(0, 0, 7)$ ist der Spiegelpunkt von $P(4, 3, -2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε , an der P gespiegelt wurde?

Aufgabe 7.30

Lösungsidee: Wenn P und P' Spiegelpunkte sind, so ist die Spiegelebene gerade die Mittelnormalebene.



$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + d = 0$$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + d = 0$$

Mittelpunkt der Strecke PP' : $M(2, 1.5, 2.5) \in \varepsilon$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + d = 0$$

Mittelpunkt der Strecke PP' : $M(2, 1.5, 2.5) \in \varepsilon$

$$d_\varepsilon = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = -(8 + 4.5 - 22.5) = 10$$

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + d = 0$$

Mittelpunkt der Strecke PP' : $M(2, 1.5, 2.5) \in \varepsilon$

$$d_\varepsilon = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = -(8 + 4.5 - 22.5) = 10$$

$$\varepsilon: 4x + 3y - 9z + 10 = 0$$

Aufgabe 7.31

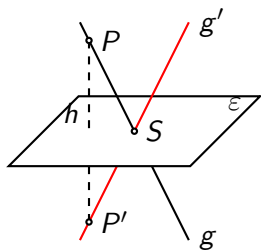
Die Gerade g wird an der Ebene ε gespiegelt. Bestimme eine Parametergleichung der Spiegelgeraden g' .

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: 4x + 2y - z + 1 = 0$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: x - 3y - 2z + 42 = 0$$

Aufgabe 7.31

Lösungsidee: Wähle einen Punkt $P \in g$ mit $P \notin \varepsilon$ und spiegle ihn an der Ebene ε . Die Gerade g' durch den Spiegelpunkt P' und den Schnittpunkt $g \cap \varepsilon = S$ ist die gesuchte gespiegelte Gerade g' .



$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$$

$$21 + 21t = 0$$

$$t = -1$$

$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$$

$$21 + 21t = 0$$

$$t = -1$$

$t' = -2$ in h einsetzen: $P'(-1, -6, 6)$

$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$$

$$21 + 21t = 0$$

$$t = -1$$

$t' = -2$ in h einsetzen: $P'(-1, -6, 6)$

$$g \cap \varepsilon: 4(7 + 2t) + 2(-2) - (4 + t) + 1 = 0$$

$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$$

$$21 + 21t = 0$$

$$t = -1$$

$t' = -2$ in h einsetzen: $P'(-1, -6, 6)$

$$g \cap \varepsilon: 4(7 + 2t) + 2(-2) - (4 + t) + 1 = 0$$

$$7t + 21 = 0$$

$$t = -3$$

$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$$

$$21 + 21t = 0$$

$$t = -1$$

$t' = -2$ in h einsetzen: $P'(-1, -6, 6)$

$$g \cap \varepsilon: 4(7 + 2t) + 2(-2) - (4 + t) + 1 = 0$$

$$7t + 21 = 0$$

$$t = -3$$

$$\Rightarrow S(1, -2, 1)$$

$$(a) P(7, -2, 4) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 4(7 + 4t) + 2(-2 + 2t) - (4 - t) + 1 = 0$$

$$21 + 21t = 0$$

$$t = -1$$

$$t' = -2 \text{ in } h \text{ einsetzen: } P'(-1, -6, 6)$$

$$g \cap \varepsilon: 4(7 + 2t) + 2(-2) - (4 + t) + 1 = 0$$

$$7t + 21 = 0$$

$$t = -3$$

$$\Rightarrow S(1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad P(-1, -1, 1) \in g \quad \Rightarrow \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7, 17, 13)$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7, 17, 13)$

$$g \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-2) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7, 17, 13)$

$$g \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-2) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 - 21t = 0$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7, 17, 13)$

$$g \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-2) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 - 21t = 0$$

$$t = 2$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$$t' = -6 \text{ in } h \text{ einsetzen: } P'(-7, 17, 13)$$

$$g \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-2) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 - 21t = 0$$

$$t = 2$$

$$\Rightarrow S(-7, 7, 7)$$

$$(b) P(-1, -1, 1) \in g \Rightarrow h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-1 + 4t) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 + 14t = 0$$

$$t = -3$$

$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7, 17, 13)$

$$g \cap \varepsilon: (-1 - 3t) - 3(-2) - 2(1 + 3t) + 42 = 0$$

$$42 - 21t = 0$$

$$t = 2$$

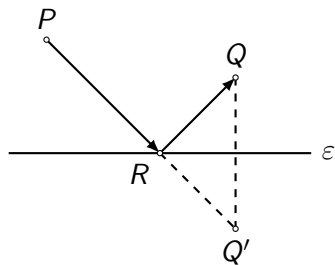
$\Rightarrow S(-7, 7, 7)$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.32

Ein Lichtstrahl geht durch $P(7, -7, 4)$ und wird an der Ebene $\varepsilon: 5x - 2y + 3z - 23 = 0$ reflektiert. Der Punkt $Q(7, -1, 8)$ liegt auf dem reflektierten Lichtstrahl. In welchem Punkt der Ebene ε erfolgt die Reflexion?

Aufgabe 7.32



- ▶ Q an ε spiegeln $\rightarrow Q'$
- ▶ $(PQ') \cap \varepsilon \rightarrow R$

oder (nicht eingezeichnet):

- ▶ P an ε spiegeln $\rightarrow P'$
- ▶ $(P'Q) \cap \varepsilon \rightarrow R$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$

$$t = -1$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$t' = 2 \cdot (-1) \text{ in } h \text{ einsetzen: } \Rightarrow Q'(-3, 3, 2)$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$t' = 2 \cdot (-1) \text{ in } h \text{ einsetzen: } \Rightarrow Q'(-3, 3, 2)$$

$$g(PQ'): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$t' = 2 \cdot (-1) \text{ in } h \text{ einsetzen: } \Rightarrow Q'(-3, 3, 2)$$

$$g(PQ'): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 5(7 - 5t) - 2(-7 + 5t) + 3(4 - t) - 23 = 0$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$t' = 2 \cdot (-1) \text{ in } h \text{ einsetzen: } \Rightarrow Q'(-3, 3, 2)$$

$$g(PQ'): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 5(7 - 5t) - 2(-7 + 5t) + 3(4 - t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon: 5(7 + 5t) - 2(-1 - 2t) + 3(8 + 3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$t' = 2 \cdot (-1) \text{ in } h \text{ einsetzen: } \Rightarrow Q'(-3, 3, 2)$$

$$g(PQ'): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

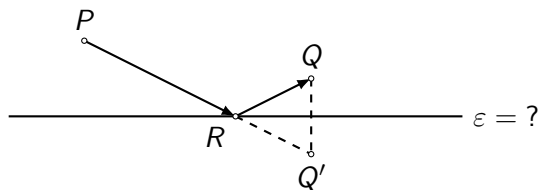
$$g \cap \varepsilon: 5(7 - 5t) - 2(-7 + 5t) + 3(4 - t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$$R(2, -2, 3)$$

Aufgabe 7.33

Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(14, 7, -11)$ aus, wird in $R(5, 1, 4)$ an der Ebene ε reflektiert und läuft anschliessend durch den Punkt $Q(3, 13, 2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε ?

Aufgabe 7.33



- ▶ Q' bestimmen.
- ▶ ε ist die Mittelnormalebene von Q und Q' .

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR}$$

$$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR}$$

$$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR}$$

$$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{38}}{3\sqrt{38}} \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR}$$

$$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\vec{RQ}|}{|\vec{PR}|} \cdot \vec{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{38}}{3\sqrt{38}} \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'(-1, -3, 14)$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$M_{QQ'}(1, 5, 8)$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$$M_{QQ'}(1, 5, 8)$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$$M_{QQ'}(1, 5, 8)$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3$$

$$\varepsilon: x + 4y - 3z + 3 = 0$$

Aufgabe 7.34

Bestimme den spitzen Schnittwinkel der Ebenen ε und δ

(a) $\varepsilon: 5x - y - 6z + 1 = 0$; $\delta: 4x + z - 3 = 0$

(b) $\varepsilon: 3x - 2y + 5z - 2 = 0$; δ gegeben durch $P(3, -1, 4)$ und

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) $\varepsilon: 2x + 4y - 3z + 7 = 0$; δ gegeben durch die parallelen Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.34

(a) $\vec{n}_\varepsilon = (5, -1, -6)^T$, $\vec{n}_\delta = (4, 0, 1)^T$

Aufgabe 7.34

$$(a) \quad \vec{n}_\varepsilon = (5, -1, -6)^T, \quad \vec{n}_\delta = (4, 0, 1)^T$$

$$\sphericalangle(\varepsilon, \delta) = \sphericalangle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta)$$

$$= \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|}$$

$$= \arccos \frac{|5 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + (-6) \cdot 1|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 6^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$= \arccos \frac{14}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{17}} = 64.45^\circ$$

(b) $\vec{n}_\varepsilon = (3, -2, 5)^\top$

Einen Normalenvektor von δ erhält man über das Kreuzprodukt des Richtungsvektors \vec{v} von g und einem weiteren Richtungsvektor dieser Ebene, nämlich dem Vektor zwischen dem Punkt P und dem Punkt $A(2, 2, 1)$ der Geraden g .

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -14 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\varepsilon, \delta) &= \sphericalangle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} \\ &= \arccos \frac{35}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{374}} = 72.93^\circ \end{aligned}$$

$$(c) \angle(\varepsilon, \delta) = \dots = 48.00^\circ$$

Aufgabe 7.35

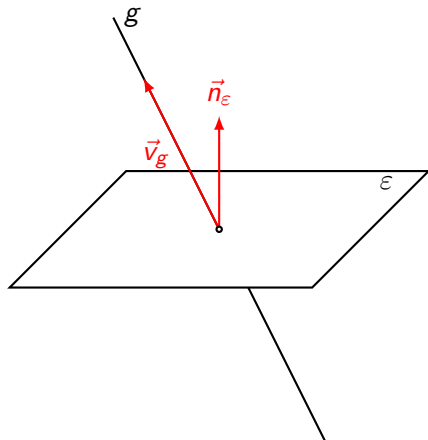
Bestimme den spitzen Schnittwinkel von Gerade g und Ebene ε .

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: 3x - 4y + 6 = 0$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon: 2x - 5y + z + 3 = 0$$

Aufgabe 7.35

Lösungsidee: Berechne den spitzen Schnittwinkel φ' zwischen einem Richtungsvektor \vec{v}_g der Geraden g und einem Normalenvektor \vec{n}_ε der Ebene ε und ergänze diesen Winkel auf 90° .



(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^T$

(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^T$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_e = (3, -4, 0)^T$

(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^T$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = (3, -4, 0)^T$

$$\begin{aligned}\varphi' &= \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 4 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{9 + 16}} \\ &= \arccos \frac{2}{15} = 82.34^\circ\end{aligned}$$

(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^T$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = (3, -4, 0)^T$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 4 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{9 + 16}}$$

$$= \arccos \frac{2}{15} = 82.34^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 82.34^\circ = 7.66^\circ$$

(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^T$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = (3, -4, 0)^T$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 4 + 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \sqrt{9 + 16}}$$

$$= \arccos \frac{2}{15} = 82.34^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 82.34^\circ = 7.66^\circ$$

$$\text{oder direkt: } \sphericalangle(g, \varepsilon) = \arcsin \frac{2}{15} = 7.66^\circ$$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 5 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 1} \sqrt{4 + 25 + 1}} \\ &= \arccos \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 90^\circ \end{aligned}$$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 5 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 1} \sqrt{4 + 25 + 1}}$$

$$= \arccos \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \arccos \frac{|6 - 5 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 1} \sqrt{4 + 25 + 1}}$$

$$= \arccos \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

geometrische Deutung: $g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 7.36

Für welchen Wert c schliesst die Ebene $\varepsilon: 4x + cz - 1 = 0$ mit der xy -Ebene einen Winkel von 45° ein?

Aufgabe 7.36

Normalenvektor der xy -Ebene: $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)^T$

Aufgabe 7.36

Normalenvektor der xy -Ebene: $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)^T$

Normalenvektor von ε : $\vec{n}_\varepsilon = (4, 0, c)^T$

Aufgabe 7.36

Normalenvektor der xy -Ebene: $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)^T$

Normalenvektor von ε : $\vec{n}_\varepsilon = (4, 0, c)^T$

$$\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\varepsilon}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{c}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{16 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2c = \sqrt{2}\sqrt{16 + c^2}$$

$$4c^2 = 2(16 + c^2)$$

$$2c^2 = 16 + c^2$$

$$c^2 = 16$$

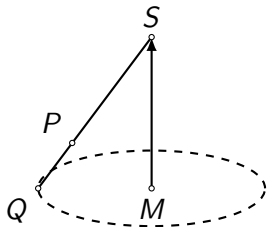
$$c = \pm 4$$

Aufgabe 7.37

Ein gerader Kreiskegel besitzt die Spitze $S(-7, -3, 14)$. Der Punkt $M(3, -1, 3)$ ist der Mittelpunkt des Grundkreises. $P(1, -1, 8)$ liegt auf einer Mantellinie des Kegels. Berechne das Volumen des Kegels.

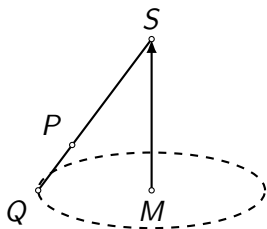
Aufgabe 7.37

Da bei einem *geraden* Kreiskegel die Kegelachse *senkrecht* auf der Grundkreisebene steht, ist der Vektor \overrightarrow{MS} ein Normalenvektor der Grundkreisebene.



Aufgabe 7.37

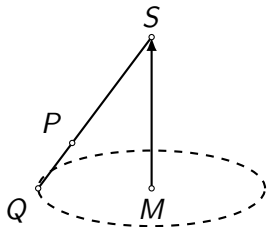
Da bei einem *geraden* Kreiskegel die Kegelachse *senkrecht* auf der Grundkreisebene steht, ist der Vektor \overrightarrow{MS} ein Normalenvektor der Grundkreisebene.



$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.37

Da bei einem *geraden* Kreiskegel die Kegelachse *senkrecht* auf der Grundkreisebene steht, ist der Vektor \vec{MS} ein Normalenvektor der Grundkreisebene.



$$\vec{MS} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = 5 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 10x + 2y - 11z + 5 = 0$$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$$\vec{SP} = \dots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$$\vec{SP} = \dots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 10(-7 + 4t) + 2(-3 + t) - 11(14 - 3t) + 5 = 0$$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$$\vec{SP} = \dots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 10(-7 + 4t) + 2(-3 + t) - 11(14 - 3t) + 5 = 0$$

$$-225 + 75t = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow Q(5, 0, 5)$$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$$\vec{SP} = \dots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 10(-7 + 4t) + 2(-3 + t) - 11(14 - 3t) + 5 = 0$$

$$-225 + 75t = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow Q(5, 0, 5)$$

$$\text{Kegelradius: } r = |\vec{MQ}| = \dots = 3$$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$$\vec{SP} = \dots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 10(-7 + 4t) + 2(-3 + t) - 11(14 - 3t) + 5 = 0$$

$$-225 + 75t = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow Q(5, 0, 5)$$

$$\text{Kegelradius: } r = |\vec{MQ}| = \dots = 3$$

$$\text{Kegelhöhe: } h = |\vec{MS}| = \dots = 15$$

$g(SP) \cap \varepsilon \rightarrow Q:$

$$\vec{SP} = \dots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 10(-7 + 4t) + 2(-3 + t) - 11(14 - 3t) + 5 = 0$$

$$-225 + 75t = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow Q(5, 0, 5)$$

$$\text{Kegelradius: } r = |\vec{MQ}| = \dots = 3$$

$$\text{Kegelhöhe: } h = |\vec{MS}| = \dots = 15$$

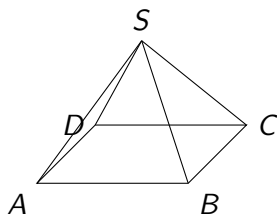
$$\text{Kegelvolumen: } \frac{1}{3} \pi r^2 h = 45\pi$$

Aufgabe 7.38

Vom Quadrat $ABCD$ sind $A(3, 2, 1)$, $B(-3, -1, -5)$ und $C(3, y, z)$ gegeben. Dieses Quadrat ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit dem Volumen $V = 324$.

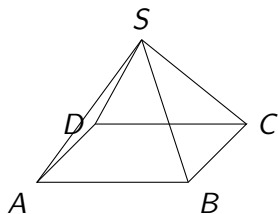
- (a) Bestimme die *ganzzahligen* Werte y und z .
- (b) Welche Koordinaten hat die Spitze S der Pyramide? (zwei Lösungen)

Aufgabe 7.38



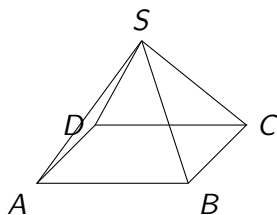
(a) $\vec{AB} = (-6, -3, -6)^T$, $\vec{BC} = (6, y + 1, z + 5)^T$

Aufgabe 7.38



(a) $\vec{AB} = (-6, -3, -6)^T$, $\vec{BC} = (6, y + 1, z + 5)^T$
 $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$

Aufgabe 7.38

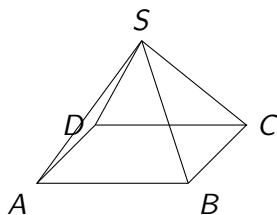


$$(a) \quad \vec{AB} = (-6, -3, -6)^T, \quad \vec{BC} = (6, y + 1, z + 5)^T$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$$

$$\sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{36 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2}$$

Aufgabe 7.38



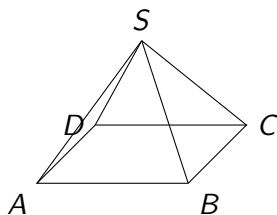
$$(a) \vec{AB} = (-6, -3, -6)^T, \vec{BC} = (6, y + 1, z + 5)^T$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$$

$$\sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{36 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2}$$

$$81 = 36 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 10z + 25$$

Aufgabe 7.38



$$(a) \quad \overrightarrow{AB} = (-6, -3, -6)^T, \quad \overrightarrow{BC} = (6, y+1, z+5)^T$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$\sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{36 + (y+1)^2 + (z+5)^2}$$

$$81 = 36 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 10z + 25$$

$$0 = y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$(-2z - 23)^2 + 2(-2z - 23) + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$(-2z - 23)^2 + 2(-2z - 23) + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$4z^2 + 92z + 529 - 4z - 46 + z^2 + 10z + 53 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$(-2z - 23)^2 + 2(-2z - 23) + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$4z^2 + 92z + 529 - 4z - 46 + z^2 + 10z + 53 = 0$$

$$5z^2 + 98z + 464 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$-36 - 3y - 3 - 6z - 30 = 0$$

$$y = -2z - 23 \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen:

$$y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$(-2z - 23)^2 + 2(-2z - 23) + z^2 + 10z - 19 = 0$$

$$4z^2 + 92z + 529 - 4z - 46 + z^2 + 10z + 53 = 0$$

$$5z^2 + 98z + 464 = 0$$

$$z_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -7 \quad \Rightarrow \quad C_1(3, -7, -8)$$

$$z_2 = -11.6 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \text{nicht ganzzahlig}$$

$$(b) \quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$$

$$(b) \quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5.5 \\ -11.5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5.5 \\ -11.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S_1(7, 5.5, -11.5)$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_2(-1, -10.5, 4.5)$$

Aufgabe 7.39

Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E .

(a) $P(3, 5, 1)$, $\varepsilon: 4x + 7y - 4z + 2 = 0$

(b) $P(7, -2, -5)$, $\varepsilon: 6x - 9y - 2z + 7 = 0$

(c) $P(-4, 0, 29)$, $\varepsilon: 15x + 8y - 8 = 0$

Aufgabe 7.39

$$(a) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{45}{9} = 5$$

Aufgabe 7.39

$$(a) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$(b) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|6 \cdot 7 - 9 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 7|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} = \frac{77}{11} = 7$$

Aufgabe 7.39

$$(a) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$(b) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|6 \cdot 7 - 9 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 7|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} = \frac{77}{11} = 7$$

$$(c) \quad d(P, \varepsilon) = \frac{|15 \cdot (-4) + 8 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{15^2 + 8^2 + 0^2}} = \frac{68}{17} = 4$$

Aufgabe 7.40

$A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$ und $D(1, 1, 2)$ sind Eckpunkte einer Pyramide $ABCD$.

Berechne die Höhe der Pyramide über der Grundfläche BCD und den Winkel, den die Seitenkante AC mit der Grundfläche BCD einschliesst.

Aufgabe 7.40

- ▶ Gleichung der Ebene durch BCD :

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 2x + 2y + z - 6 = 0$$

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 2x + 2y + z - 6 = 0$$

Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes A von ε :

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: 2x + 2y + z - 6 = 0$$

Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes A von ε :

$$h = d(A, \varepsilon) \stackrel{\text{HNF}}{=} \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{6}{3} = 2$$

► Seitenkante $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

► Seitenkante $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sphericalangle(\vec{AC}, \vec{n}) = \arccos \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 26.57^\circ$$

► Seitenkante $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sphericalangle(\vec{AC}, \vec{n}) = \arccos \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 26.57^\circ$$

$$\sphericalangle(\vec{AC}, BCD) = 90^\circ - 26.57^\circ = 63.43^\circ$$

Aufgabe 7.41

Bestimme die Koordinatengleichungen der Parallelebenen zur Ebene ε im Abstand d .

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

(c) $\varepsilon: 9x + 12y + 8z - 6 = 0, d = 2$

Aufgabe 7.41

Wird eine Ebene $\varepsilon: ax + by + cz + d = 0$ um h Einheiten parallel entlang ihres Normalenvektors verschoben, so bedeutet dies für die HNF der verschobenen Ebene δ und einen beliebigen Punkt P :

$$\begin{aligned}\text{dist}(P, \delta) &= \text{dist}(P, \varepsilon) \pm h \\ &= \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm h \\ &= \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm \frac{h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{ax + by + cz + d \pm h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

Also muss $\pm h\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ zur Ebenengleichung von ε addiert werden, um die Ebenengleichung von δ zu erhalten.

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

$$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

$$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$$

$$\delta_1: 24x - 7z + 105 = 0$$

$$\delta_2: 24x - 7z - 95 = 0$$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

$$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$$

$$\delta_1: 24x - 7z + 105 = 0$$

$$\delta_2: 24x - 7z - 95 = 0$$

(c) $\varepsilon: 9x + 12y + 8z - 6 = 0, d = 2$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

$$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$$

$$\delta_1: 24x - 7z + 105 = 0$$

$$\delta_2: 24x - 7z - 95 = 0$$

(c) $\varepsilon: 9x + 12y + 8z - 6 = 0, d = 2$

$$2\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{289} = 2 \cdot 17 = 34$$

(a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0, d = 3$

$$3\sqrt{11^2 + 2^2 + 10^2} = 3 \cdot \sqrt{225} = 3 \cdot 15 = 45$$

$$\delta_1: 11x - 2y + 10z + 30 = 0$$

$$\delta_2: 11x - 2y + 10z - 6 = 0$$

(b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0, d = 4$

$$4\sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = 4 \cdot \sqrt{625} = 4 \cdot 25 = 100$$

$$\delta_1: 24x - 7z + 105 = 0$$

$$\delta_2: 24x - 7z - 95 = 0$$

(c) $\varepsilon: 9x + 12y + 8z - 6 = 0, d = 2$

$$2\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{289} = 2 \cdot 17 = 34$$

$$\delta_1: 9x + 12y + 8z + 28 = 0$$

$$\delta_2: 9x + 12y + 8z - 40 = 0$$

Aufgabe 7.42

Bestimme die Koordinatengleichungen der winkelhalbierenden Ebenen der gegebenen Ebenen ε und δ .

(a) $\varepsilon: 4x - 2y - 4z + 3 = 0$, $\delta: x + 2y - 2z + 5 = 0$

(b) $\varepsilon: 6x + 6y + 17z - 2 = 0$, $\delta: 15x - 10y - 6z + 9 = 0$

(c) $\varepsilon: 10x - 11y + 2z - 11 = 0$, $\delta: 4y - 3z - 8 = 0$

(d) $\varepsilon: 3x - 6y - 2z - 10 = 0$, $\delta: 4x + 8y - z - 10 = 0$

Aufgabe 7.42

$$(a) \quad \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

Aufgabe 7.42

$$(a) \quad \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$
$$\frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{6} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{3} \quad || \cdot 6$$

Aufgabe 7.42

$$(a) \quad \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$\frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{6} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{3} \quad || \cdot 6$$

$$|4x - 2y - 4z + 3| = |2x + 4y - 4z + 10|$$

Aufgabe 7.42

$$(a) \quad \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$\frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{6} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{3} \quad || \cdot 6$$

$$|4x - 2y - 4z + 3| = |2x + 4y - 4z + 10|$$

$$4x - 2y - 4z + 3 = 2x + 4y - 4z + 10$$

Aufgabe 7.42

$$(a) \quad \frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$\frac{|4x - 2y - 4z + 3|}{6} = \frac{|x + 2y - 2z + 5|}{3} \quad || \cdot 6$$

$$|4x - 2y - 4z + 3| = |2x + 4y - 4z + 10|$$

$$4x - 2y - 4z + 3 = 2x + 4y - 4z + 10$$

$$\omega_1: 2x - 6y - 7 = 0$$

$$4x - 2y - 4z + 3 = -(2x + 4y - 4z + 10)$$

$$\omega_2: 6x + 2y - 8z + 13 = 0$$

$$(b) \quad \frac{|6x + 6y + 17z - 2|}{\sqrt{36 + 36 + 289}} = \frac{|15x - 10y - 6z + 9|}{\sqrt{225 + 100 + 36}}$$
$$\frac{|6x + 6y + 17z - 2|}{19} = \frac{|15x - 10y - 6z + 9|}{19} \quad || \cdot 19$$

$$|6x + 6y + 17z - 2| = |15x - 10y - 6z + 9|$$

$$6x + 6y + 17z - 2 = 15x - 10y - 6z + 9$$

$$\omega_1: 9x - 16y - 23z + 11 = 0$$

$$6x + 6y + 17z - 2 = -(15x - 10y - 6z + 9)$$

$$\omega_2: 21x - 4y + 11z + 7 = 0$$

(c) $\omega_1: 10x - 23y + 11z - 35 = 0$

$\omega_2: 10x + y - 7z + 13 = 0$

(d) $\omega_1: x + 110y + 11z + 20 = 0$

$\omega_2: 55x + 2y - 25z - 160 = 0$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0, \quad \delta: 4x + 3z + 7 = 0$$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0, \quad \delta: 4x + 3z + 7 = 0$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0, \quad \delta: 4x + 3z + 7 = 0$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon: 14x - 7y - 22z + 38 = 0, \quad \delta: 4x + 7y - 4z + 2 = 0$$

Aufgabe 7.43

$$(a) \frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3z + 7|}{\sqrt{16 + 9}}$$

Aufgabe 7.43

$$(a) \frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3z + 7|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 2|}{5} = \frac{|4x + 3z + 7|}{5} \quad || \cdot 5$$

Aufgabe 7.43

$$(a) \frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3z + 7|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 2|}{5} = \frac{|4x + 3z + 7|}{5} \quad || \cdot 5$$

$$|3x - 4y + 2| = |4x + 3z + 7|$$

Aufgabe 7.43

$$(a) \frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3z + 7|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 2|}{5} = \frac{|4x + 3z + 7|}{5} \quad || \cdot 5$$

$$|3x - 4y + 2| = |4x + 3z + 7|$$

$$3x - 4y + 2 = \pm(4x + 3z + 7)$$

$$\omega_1: x + 4y + 3z + 5 = 0$$

$$\omega_2: 7x - 4y + 3z + 9 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$7(0 + t) - 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 9 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$7(0 + t) - 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 9 = 0$$

$$7t - 4 + 4t + 6 + 9 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$7(0 + t) - 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 9 = 0$$

$$7t - 4 + 4t + 6 + 9 = 0$$

$$11t + 11 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$7(0 + t) - 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 9 = 0$$

$$7t - 4 + 4t + 6 + 9 = 0$$

$$11t + 11 = 0$$

$$t = -1$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$1(0 + t) + 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 5 = 0$$

$$t + 4 - 4t + 6 + 5 = 0$$

$$-3t + 15 = 0$$

$$t = 5$$

$$P_1 = (5, -4, 2)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$7(0 + t) - 4(1 - t) + 3(2 + 0) + 9 = 0$$

$$7t - 4 + 4t + 6 + 9 = 0$$

$$11t + 11 = 0$$

$$t = -1$$

$$P_2 = (-1, 2, 2)$$

$$(b) \frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{\sqrt{196 + 49 + 484}} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{\sqrt{16 + 49 + 16}}$$

$$(b) \frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{\sqrt{196 + 49 + 484}} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{\sqrt{16 + 49 + 16}}$$

$$\frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{27} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{9}$$

$\parallel \cdot 27$

$$(b) \frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{\sqrt{196 + 49 + 484}} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{\sqrt{16 + 49 + 16}}$$

$$\frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{27} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{9} \quad || \cdot 27$$

$$|14x - 7y - 22z + 38| = |12x + 21y - 12z + 6|$$

$$(b) \frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{\sqrt{196 + 49 + 484}} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{\sqrt{16 + 49 + 16}}$$

$$\frac{|14x - 7y - 22z + 38|}{27} = \frac{|4x + 7y - 4z + 2|}{9} \quad || \cdot 27$$

$$|14x - 7y - 22z + 38| = |12x + 21y - 12z + 6|$$

$$14x - 7y - 22z + 38 = \pm(12x + 21y - 12z + 6)$$

$$\omega_1: 2x - 28y - 10z + 32 = 0$$

$$\omega_2: 26x + 14y - 34z + 44 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$26(6 + 3t) + 14(3 + 2t) - 34(2 - 2t) + 44 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$26(6 + 3t) + 14(3 + 2t) - 34(2 - 2t) + 44 = 0$$

$$174t + 174 = 0$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$26(6 + 3t) + 14(3 + 2t) - 34(2 - 2t) + 44 = 0$$

$$174t + 174 = 0$$

$$t = -1$$

$$g \cap \omega_1 = \{P_1\}:$$

$$2(6 + 3t) - 28(3 + 2t) - 10(2 - 2t) + 32 = 0$$

$$-30t - 60 = 0$$

$$t = -2$$

$$P_1 = (0, -1, 6)$$

$$g \cap \omega_2 = \{P_2\}:$$

$$26(6 + 3t) + 14(3 + 2t) - 34(2 - 2t) + 44 = 0$$

$$174t + 174 = 0$$

$$t = -1$$

$$P_2 = (3, 1, 4)$$

Aufgabe 7.44

- (a) Welchen Abstand hat der Punkt $P(3, 3, 5)$ von der Ebene $\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0$?
- (b) Ein Punkt $Q(x, 1, 1)$ hat gleichen Abstand von ε und von der xy -Ebene. Bestimme seine x -Koordinate.

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) \quad d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) \quad d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \quad \pi_1: z = 0$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) \quad d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \quad \pi_1: z = 0$$

$$\text{dist}(Q, \varepsilon) = \text{dist}(Q, \pi_1)$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) \quad d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \quad \pi_1: z = 0$$

$$\text{dist}(Q, \varepsilon) = \text{dist}(Q, \pi_1)$$

$$\frac{x - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 7}{17} = \pm \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}}$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) \quad d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \quad \pi_1: z = 0$$

$$\text{dist}(Q, \varepsilon) = \text{dist}(Q, \pi_1)$$

$$\frac{x - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 7}{17} = \pm \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}}$$

$$x + 7 = \pm 17$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \pi_1: z = 0$$

$$\text{dist}(Q, \varepsilon) = \text{dist}(Q, \pi_1)$$

$$\frac{x - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 7}{17} = \pm \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}}$$

$$x + 7 = \pm 17$$

$$x_1 = 10$$

Aufgabe 7.44

$$\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0?$$

$$(a) \quad d = \frac{3 - 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 144 + 144}} = \frac{34}{17} = 2$$

$$(b) \quad \pi_1: z = 0$$

$$\text{dist}(Q, \varepsilon) = \text{dist}(Q, \pi_1)$$

$$\frac{x - 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 7}{17} = \pm \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1}}$$

$$x + 7 = \pm 17$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 24$$

Aufgabe 8.1

Stelle die Gleichung der Kugel $K(M, \varrho)$ auf.

(a) $M(1, 1, 1), \varrho = 4$

(b) $M(3, 0, -2), \varrho = \sqrt{5}$

Aufgabe 8.1

(a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 16$

Aufgabe 8.1

(a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 16$

(b) $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 5$

Aufgabe 8.2

Untersuche, ob es sich um die Gleichung einer Kugel handelt und bestimme in diesem Fall ihren Mittelpunkt M und ihren Radius ϱ .

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ und Radius $\varrho = 5$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ und Radius $\rho = 5$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 = -12$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9 = 3^2$$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ und Radius $\rho = 5$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 = -12$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9 = 3^2$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1, -2, 4)$ und Radius $\rho = 3$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ und Radius $\rho = 5$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 = -12$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9 = 3^2$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1, -2, 4)$ und Radius $\rho = 3$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

Aufgabe 8.2

(a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0, 0, 0)$ und Radius $\rho = 5$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 4)^2 - 16 = -12$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9 = 3^2$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1, -2, 4)$ und Radius $\rho = 3$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

keine Kugel (wegen $-z^2$)

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

$$(d) \quad 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12}{36} + \frac{3}{36}$$

$$(d) \quad 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12}{36} + \frac{3}{36}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$(d) \quad 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12}{36} + \frac{3}{36}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

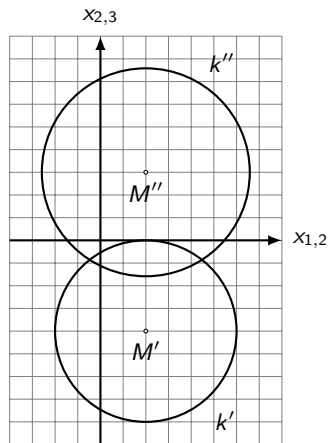
Kugel mit Mittelpunkt $M\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ und Radius $\varrho = \sqrt{\frac{5}{12}}$

Aufgabe 8.3

Schneide die Kugel $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ mit der Grundrissebene.

Aufgabe 8.3

Darstellung der Kugel in der DG-Zweitafelprojektion:



In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 25$$

In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 25$$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 25$$

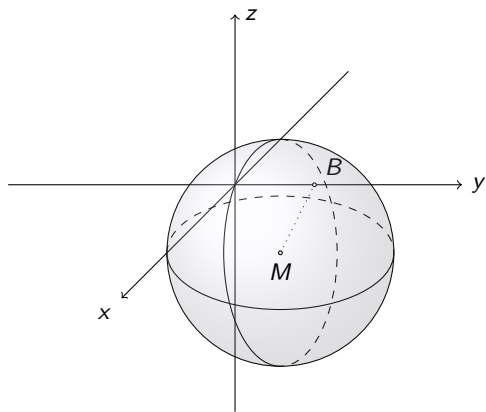
$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Kreis in π_1 mit $M(4, 2, 0)$ und $\varrho = 4$

Aufgabe 8.4

Eine Kugel mit Zentrum $M(3, 1, -4)$ schneidet die y -Achse im Punkt $B(0, 7, 0)$. Bestimme die übrigen Schnittpunkte der Kugel mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 8.4



$$\overrightarrow{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varrho^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 + 36 + 16 = 61$$

$$\overrightarrow{MB} = \vec{r}_B - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varrho^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 + 36 + 16 = 61$$

$$K: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 61$$

Schnittpunkte mit der x -Achse:

Schnittpunkte mit der x -Achse:

$$g_x: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte mit der x -Achse:

$$g_x: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_x: (x - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (0 + 4)^2 = 61$$

$$(x - 3)^2 + 1 + 16 = 61$$

$$(x - 3)^2 = 44$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{44}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{44}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{44}$$

Schnittpunkte mit der x -Achse:

$$g_x: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_x: (x - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (0 + 4)^2 = 61$$

$$(x - 3)^2 + 1 + 16 = 61$$

$$(x - 3)^2 = 44$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{44}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{44}$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{44}$$

$$A_1(3 + \sqrt{44}, 0, 0), A_2(3 - \sqrt{44}, 0, 0)$$

Schnittpunkte mit der y -Achse:

Schnittpunkte mit der y -Achse:

$$g_y: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte mit der y -Achse:

$$g_y: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_y: (0 - 3)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 4)^2 = 61$$

$$9 + (y - 1)^2 + 16 = 61$$

$$(y - 1)^2 = 36$$

$$y - 1 = \pm 6$$

$$y_1 = 1 + 6 = 7$$

$$y_2 = 1 - 6 = -5$$

Schnittpunkte mit der y -Achse:

$$g_y: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_y: (0 - 3)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 4)^2 = 61$$

$$9 + (y - 1)^2 + 16 = 61$$

$$(y - 1)^2 = 36$$

$$y - 1 = \pm 6$$

$$y_1 = 1 + 6 = 7$$

$$y_2 = 1 - 6 = -5$$

$$B_1(0, 7, 0), B_2(0, -5, 0)$$

Schnittpunkte mit der z -Achse:

Schnittpunkte mit der z -Achse:

$$g_z: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte mit der z-Achse:

$$g_z: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_y: (0 - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (z + 4)^2 = 61$$

$$9 + 1 + (z + 4)^2 = 61$$

$$(z + 4)^2 = 51$$

$$z + 4 = \pm\sqrt{51}$$

$$z_1 = -4 + \sqrt{51}$$

$$z_2 = -4 - \sqrt{51}$$

Schnittpunkte mit der z-Achse:

$$g_z: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K \cap g_y: (0 - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (z + 4)^2 = 61$$

$$9 + 1 + (z + 4)^2 = 61$$

$$(z + 4)^2 = 51$$

$$z + 4 = \pm\sqrt{51}$$

$$z_1 = -4 + \sqrt{51}$$

$$z_2 = -4 - \sqrt{51}$$

$$C_1(0, 0, -4 + \sqrt{51}), C_2(0, 0, -4 - \sqrt{51})$$

Aufgabe 8.5

Untersuche die gegenseitige Lage von Kugel K und Gerade g und bestimme allfällige Schnitt- oder Berührungspunkte.

(a) $K: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9;$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) $K: x^2 + y^2 + z^2 = 49;$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) $K: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z - 1)^2 = 9;$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$
$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$t_1 = 2$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 3$$

Aufgabe 8.5

$$(a) \quad ([-4 + t] - 1)^2 + ([4 - t] - 2)^2 + ([3 - 2t] + 1)^2 = 9$$

$$(t - 5)^2 + (-t + 2)^2 + (-2t + 4)^2 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 45 = 9$$

$$6t^2 - 30t + 36 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 3$$

$$P_1(-2, 2-1), P_2(-1, 1, -3)$$

Aufgabe 8.5

$$(b) (8 + 0)^2 + (0 + t)^2 + (5 - 2t)^2 = 49$$

Aufgabe 8.5

$$(b) (8 + 0)^2 + (0 + t)^2 + (5 - 2t)^2 = 49$$

$$64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 = 49$$

Aufgabe 8.5

$$(b) (8 + 0)^2 + (0 + t)^2 + (5 - 2t)^2 = 49$$

$$64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 = 49$$

$$5t^2 - 20t + 40 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(b) (8 + 0)^2 + (0 + t)^2 + (5 - 2t)^2 = 49$$

$$64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 = 49$$

$$5t^2 - 20t + 40 = 0$$

$$t^2 - 4t + 8 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(b) (8 + 0)^2 + (0 + t)^2 + (5 - 2t)^2 = 49$$

$$64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 = 49$$

$$5t^2 - 20t + 40 = 0$$

$$t^2 - 4t + 8 = 0$$

$$D = -16 < 0 \quad \text{keine Lösung}$$

Aufgabe 8.5

$$(b) (8 + 0)^2 + (0 + t)^2 + (5 - 2t)^2 = 49$$

$$64 + t^2 + 25 - 20t + 4t^2 = 49$$

$$5t^2 - 20t + 40 = 0$$

$$t^2 - 4t + 8 = 0$$

$$D = -16 < 0 \quad \text{keine Lösung}$$

Die Gerade meidet die Kugel.

Aufgabe 8.5

$$(c) ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$
$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 45 = 9$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 45 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 36 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 45 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 36 = 0$$

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 45 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 36 = 0$$

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

$$(t + 2)^2 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 45 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 36 = 0$$

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

$$(t + 2)^2 = 0$$

$$t = -2$$

Aufgabe 8.5

$$(c) \quad ([4 + t] - 4)^2 + ([8 + 2t] - 5)^2 + ([7 + 2t] - 1)^2 = 9$$

$$t^2 + (2t + 3)^2 + (2t + 6)^2 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 45 = 9$$

$$9t^2 + 36t + 36 = 0$$

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

$$(t + 2)^2 = 0$$

$$t = -2$$

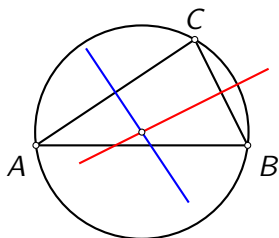
Berührungspunkt: $P(2, 4, 3)$

Aufgabe 8.6

Bestimme die Gleichung der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken $A(5, 5, 1)$, $B(7, 1, -3)$, $C(2, 7, 2)$ und $D(0, 1, 8)$.

Aufgabe 8.6

Die Lösung erfolgt analog zur Bestimmung des Umkreismittelpunkts im Dreieck: Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke hat denselben Abstand von den beiden Endpunkten. Somit hat der Schnittpunkt von zwei (der drei) Mittelsenkrechten im Dreieck den gleichen Abstand von allen drei Ecken.



Beim Tetraeder gibt es vier Kanten, wobei drei Mittelnormalebenen genügen, um ihren Schnittpunkt zu bestimmen.

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1);$$

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

Bestimme drei Mittelnormalebenen und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_{AC}(3.5, 6, 1.5);$$

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_{AC}(3.5, 6, 1.5); \mu_{AC}: -3x + 2y + z - 3 = 0$$

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_{AC}(3.5, 6, 1.5); \mu_{AC}: -3x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, M_{AD}(2.5, 3, 4.5);$$

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_{AC}(3.5, 6, 1.5); \mu_{AC}: -3x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, M_{AD}(2.5, 3, 4.5); \mu_{AD}: -5x - 4y + 7z - 7 = 0$$

Bestimme drei Mittelnormalebene und schneide sie:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, M_{AB}(6, 3, -1); \mu_{AB}: 2x - 4y - 4z - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_{AC}(3.5, 6, 1.5); \mu_{AC}: -3x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, M_{AD}(2.5, 3, 4.5); \mu_{AD}: -5x - 4y + 7z - 7 = 0$$

$\mu_{AB} \cap \mu_{AC} \cap \mu_{AD}$:

$$2x - 4y - 4z = 4$$

$$-3x + 2y + z = 3 \quad \Rightarrow \quad S(-2, -1, -1)$$

$$-5x - 4y + 7z = 7$$

Aufgabe 8.7

Zeige, dass der Punkt $P(8, 7, 2)$ auf der Kugel mit dem Mittelpunkt $M(1, 3, 6)$ und dem Radius $\varrho = 9$ liegt und bestimme die Gleichung der Tangentialebene in P .

Aufgabe 8.7

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.7

$$\vec{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{MP} = 49 + 16 + 16 = 81 = \varrho^2 \text{ (ok)}$$

Aufgabe 8.7

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 49 + 16 + 16 = 81 = \varrho^2 \text{ (ok)}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.7

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 49 + 16 + 16 = 81 = \varrho^2 \text{ (ok)}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -76$$

Aufgabe 8.7

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 49 + 16 + 16 = 81 = \varrho^2 \text{ (ok)}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -76$$

$$\tau: 7x + 4y - 4z - 76 = 0$$

Aufgabe 8.8

Vom Punkt $A(10, 0, 0)$ aus soll eine Tangentialebene an die Kugel $K: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gelegt werden, die zur Grundrissebene π_1 senkrecht steht.

Aufgabe 8.8

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (0, 0, 1)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (10, 0, 0)^T = 3^2 \quad (3)$$

Aufgabe 8.8

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (0, 0, 1)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (10, 0, 0)^T = 3^2 \quad (3)$$

Aus (2) folgt $z = 0$

Aufgabe 8.8

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (0, 0, 1)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (10, 0, 0)^T = 3^2 \quad (3)$$

Aus (2) folgt $z = 0$

Aus (3) folgt $10x = 9$ und $x = 9/10$

Aufgabe 8.8

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (0, 0, 1)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (10, 0, 0)^T = 3^2 \quad (3)$$

Aus (2) folgt $z = 0$

Aus (3) folgt $10x = 9$ und $x = 9/10$

Einsetzen in (1):

$$\frac{81}{100} + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{900 - 81}{100} = \frac{9}{100} \cdot 91 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{10} \sqrt{91}$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \cdot \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ \pm\sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \vec{n}$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \cdot \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ \pm\sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \vec{n}$$

$$d = -\vec{r}_B \cdot \vec{r}_A = -30$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \cdot \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ \pm\sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \vec{n}$$

$$d = -\vec{r}_B \cdot \vec{r}_A = -30$$

$$3x \pm \sqrt{91}y - 30 = 0$$

Aufgabe 8.9

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0, 0, 0)$ und $\rho = 3$, welche die Gerade mit der Gleichung

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

enthalten.

Aufgabe 8.9

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (2, 3, -10)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (3, 4, -5)^T = 3^2 \quad (3)$$

Aufgabe 8.9

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (2, 3, -10)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (3, 4, -5)^T = 3^2 \quad (3)$$

$$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$$

Aufgabe 8.9

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (2, 3, -10)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (3, 4, -5)^T = 3^2 \quad (3)$$

$$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$$

$$3x + 4y - 5z = 9 \quad (3)$$

Aufgabe 8.9

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (2, 3, -10)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (3, 4, -5)^T = 3^2 \quad (3)$$

$$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$$

$$3x + 4y - 5z = 9 \quad (3)$$

$$(3) - (2): x + y + 5z = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9 - y - 5z \quad (4)$$

Aufgabe 8.9

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührungspunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$K: x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad (1)$$

$$(x, y, z)^T (2, 3, -10)^T = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z)^T (3, 4, -5)^T = 3^2 \quad (3)$$

$$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$$

$$3x + 4y - 5z = 9 \quad (3)$$

$$(3) - (2): x + y + 5z = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9 - y - 5z \quad (4)$$

$$x \text{ aus (2) und (3) eliminieren: } y = 20z - 18 \quad (5)$$

(5) in (4) einsetzen: $x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z$ (6)

$$(5) \text{ in } (4) \text{ einsetzen: } x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$(27 - 25z)^2 + (20z - 18)^2 + z^2 = 9$$

$$1026z^2 - 2070z + 1044 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 58/57$$

$$(5) \text{ in } (4) \text{ einsetzen: } x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$(27 - 25z)^2 + (20z - 18)^2 + z^2 = 9$$

$$1026z^2 - 2070z + 1044 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 58/57$$

z_1, z_2 in (5) und (6) einsetzen:

$$(5) \text{ in } (4) \text{ einsetzen: } x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$(27 - 25z)^2 + (20z - 18)^2 + z^2 = 9$$

$$1026z^2 - 2070z + 1044 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 58/57$$

z_1, z_2 in (5) und (6) einsetzen:

$$y_1 = 20z_1 - 18 = 2$$

$$y_2 = 20z_2 - 18 = 134/57$$

$$(5) \text{ in } (4) \text{ einsetzen: } x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$(27 - 25z)^2 + (20z - 18)^2 + z^2 = 9$$

$$1026z^2 - 2070z + 1044 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = 58/57$$

z_1, z_2 in (5) und (6) einsetzen:

$$y_1 = 20z_1 - 18 = 2$$

$$y_2 = 20z_2 - 18 = 134/57$$

$$x_1 = 27 - 25z_1 = 2$$

$$x_2 = 27 - 25z_2 = 89/57$$

$$\vec{n}_1 = (2, 2, 1)^T, \vec{n}_2 = (89, 134, 58)^T$$

$$\vec{n}_1 = (2, 2, 1)^T, \vec{n}_2 = (89, 134, 58)^T$$

$$A(3, 4, -5) \in \tau_{1,2}:$$

$$\vec{n}_1 = (2, 2, 1)^T, \vec{n}_2 = (89, 134, 58)^T$$

$$A(3, 4, -5) \in \tau_{1,2}:$$

$$d_1 = -\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_A = -9$$

$$d_2 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{r}_A = -513$$

$$\vec{n}_1 = (2, 2, 1)^T, \vec{n}_2 = (89, 134, 58)^T$$

$$A(3, 4, -5) \in \tau_{1,2}:$$

$$d_1 = -\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_A = -9$$

$$d_2 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{r}_A = -513$$

$$\tau_1: 2x + 2y + z - 9 = 0$$

$$\tau_2: 89x + 134y + 58z - 513 = 0$$

Aufgabe 8.10

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0, 0, 0)$ und $\rho = 5$, die senkrecht zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stehen.

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von $g =$ Normalenvektoren von τ

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von $g =$ Normalenvektoren von τ

Schnittpunkte von K mit h :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von g = Normalenvektoren von τ

Schnittpunkte von K mit h : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$$9t^2 + 4t^2 + t^2 = 25$$

$$14t^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 5/\sqrt{14}$$

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von $g =$ Normalenvektoren von τ

$$\text{Schnittpunkte von } K \text{ mit } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$$9t^2 + 4t^2 + t^2 = 25$$

$$14t^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 5/\sqrt{14}$$

$$\text{Berührungspunkte: } \vec{r}_B = \pm \frac{5}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_{1,2} = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = \pm 5\sqrt{14}$$

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von $g =$ Normalenvektoren von τ

$$\text{Schnittpunkte von } K \text{ mit } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$$9t^2 + 4t^2 + t^2 = 25$$

$$14t^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad t = \pm 5/\sqrt{14}$$

$$\text{Berührungspunkte: } \vec{r}_B = \pm \frac{5}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_{1,2} = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = \pm 5\sqrt{14}$$

$$\tau_1: 3x + 2y + z + 5\sqrt{14} = 0$$

$$\tau_2: 3x + 2y + z - 5\sqrt{14} = 0$$

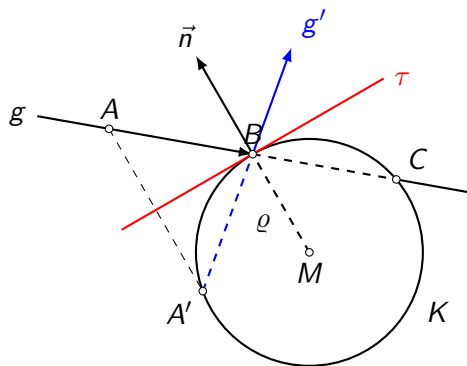
Aufgabe 8.11

Gegeben sei die Kugel K mit $M(8, 3, 2)$ und $\varrho = 5\sqrt{2}$ sowie die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fasst man den Punkt $A(-3, -2, -4)$ der Geraden als Lichtquelle auf und betrachtet die Kugeloberfläche K als Spiegel, so wird der Lichtstrahl g an der Kugel reflektiert. Bestimme eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 8.11



$$K: (x - 8)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 50$$

$$K: (x - 8)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 50$$

$$g \cap K: [x = -3 + t, y = -2, z = -4 + t]$$

$$(-3 + t - 8)^2 + (-2 - 3)^2 + (-4 + t - 2)^2 = 50$$

$$(t - 11)^2 + (-5)^2 + (t - 6)^2 = 50$$

$$t^2 - 22t + 121 + 25 + t^2 - 12t + 36 = 50$$

$$2t^2 - 34t + 132 = 0$$

$$t^2 - 17t + 66 = 0$$

$$(t - 6)(t - 11) = 0$$

$$t_1 = 6$$

$$t_2 = 11$$

$$K: (x - 8)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 50$$

$$g \cap K: [x = -3 + t, y = -2, z = -4 + t]$$

$$(-3 + t - 8)^2 + (-2 - 3)^2 + (-4 + t - 2)^2 = 50$$

$$(t - 11)^2 + (-5)^2 + (t - 6)^2 = 50$$

$$t^2 - 22t + 121 + 25 + t^2 - 12t + 36 = 50$$

$$2t^2 - 34t + 132 = 0$$

$$t^2 - 17t + 66 = 0$$

$$(t - 6)(t - 11) = 0$$

$$t_1 = 6$$

$$t_2 = 11$$

$B(3, -2, 2)$ (der zweite Schnittpunkt C ist weiter entfernt)

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{n}$$

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\tau: x + y - 1 = 0$$

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-3 + t) + (-2 + t) - 1 = 0$$

$$-3 + t - 2 + t - 1 = 0$$

$$2t - 6 = 0$$

$$t_0 = 3$$

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-3 + t) + (-2 + t) - 1 = 0$$

$$-3 + t - 2 + t - 1 = 0$$

$$2t - 6 = 0$$

$$t_0 = 3$$

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2 \cdot t_0 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$A(-3, -2, -4)$ an τ spiegeln:

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-3 + t) + (-2 + t) - 1 = 0$$

$$-3 + t - 2 + t - 1 = 0$$

$$2t - 6 = 0$$

$$t_0 = 3$$

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + 2 \cdot t_0 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A'(3, 4, -4)$$

$$\overrightarrow{A'B} = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A'B} = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung des reflektierten Lichtstrahls:

$$\overrightarrow{A'B} = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung des reflektierten Lichtstrahls:

$$g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.12

Gegeben sind die Kugeln K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten $M_1(1, 13, 18)$ bzw. $M_2(-1, 13, 14)$ und den Radien $\varrho_1 = 7$ bzw. $\varrho_2 = 3$. Zeige, dass sich die Kugeln schneiden und bestimme den Radius r des Schnittkreises.

Aufgabe 8.12

$$K_1: (x - 1)^2 + (y - 13)^2 + (z - 18)^2 = 49$$

$$K_2: (x + 1)^2 + (y - 13)^2 + (z - 14)^2 = 9$$

Aufgabe 8.12

$$K_1: (x - 1)^2 + (y - 13)^2 + (z - 18)^2 = 49$$

$$K_2: (x + 1)^2 + (y - 13)^2 + (z - 14)^2 = 9$$

$$K_1: x^2 - 2x + 1 + y^2 - 26y + 169 + z^2 - 36z + 324 - 49 = 0$$

$$K_2: x^2 + 2x + 1 + y^2 - 26y + 169 + z^2 - 28z + 196 - 9 = 0$$

Aufgabe 8.12

$$K_1: (x - 1)^2 + (y - 13)^2 + (z - 18)^2 = 49$$

$$K_2: (x + 1)^2 + (y - 13)^2 + (z - 14)^2 = 9$$

$$K_1: x^2 - 2x + 1 + y^2 - 26y + 169 + z^2 - 36z + 324 - 49 = 0$$

$$K_2: x^2 + 2x + 1 + y^2 - 26y + 169 + z^2 - 28z + 196 - 9 = 0$$

$$K_1 - K_2: -4x - 8z + 88 = 0 \quad || : -4$$

$$\varepsilon: x + 2z - 22 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \cap g: (1 + t) + 2(18 + 2t) - 22 = 0$$

$$5t + 15 = 0$$

$$t = -3$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \cap g: (1 + t) + 2(18 + 2t) - 22 = 0$$

$$5t + 15 = 0$$

$$t = -3$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $M(-2, 13, 12)$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \cap g: (1 + t) + 2(18 + 2t) - 22 = 0$$

$$5t + 15 = 0$$

$$t = -3$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $M(-2, 13, 12)$

$$d_1 = \overline{M_1 M} = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \cap g: (1 + t) + 2(18 + 2t) - 22 = 0$$

$$5t + 15 = 0$$

$$t = -3$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $M(-2, 13, 12)$

$$d_1 = \overline{M_1 M} = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$\text{Radius des Schnittkreises: } r = \sqrt{\varrho_1^2 - d_1^2} = \sqrt{49 - 45} = \sqrt{4} = 2$$