

Aufgabe 1

Bestimme den Mittelpunkt und den Radius der Kugel k .

(a) $k: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 10z + 26 = 0$

(b) $k: x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6z + 9 = 0$

(c) $k: x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 4y + 53 = 0$

(d) $k: 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 6y - 4z - 11 = 0$

(e) $k: 36x^2 + 36y^2 + 36z^2 + 48x - 108y + 60z - 103 = 0$

Aufgabe 2

Ermittle die Schnittpunkte der Kugel k mit der Geraden g durch P und Q .

(a) $k: x^2 + y^2 + z^2 = 41; \quad P(5, 2, 1), Q(6, -1, 2)$

(b) $k: x^2 + y^2 + z^2 = 29; \quad P(4, -1, 1), Q(5, 2, 0)$

(c) $k: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 81; \quad P(9, 5, 16), Q(14, 7, 21)$

(d) $k: (x + 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 49; \quad P(6, 0, 0), Q(4, 1, 0)$

Aufgabe 3

Bestimme die Gleichung der Kugel k mit dem Durchmesser \overline{AB} .

(a) $A(1, -3, 0), B(5, 1, 4)$

(b) $A(3, 0, -2), B(1, 6, 4)$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Kugeln

$$k_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 54$$

und

$$k_2: x^2 + y^2 + z^2 - 22x - 4y + 10z + 126 = 0.$$

(a) Zeige, dass sich k_1 und k_2 berühren.

(b) Bestimme den Berührungspunkt.

Aufgabe 5

Wie lautet die Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt M , welche die Ebene ε berührt?

(a) $M(6, 5, -3)$, $\varepsilon: x - 2y + 2z + 4 = 0$

(b) $M(-4, 30, -5)$, $\varepsilon: 5x - 14y + 2z = 0$

Aufgabe 6

Bestimme die Gleichungen der Kugeln mit dem Mittelpunkt M , welche die gegebene Kugel k berühren?

(a) $M(9, 1, 5)$, $k: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 49$

(b) $M(5, 4, 6)$, $k: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$

Aufgabe 7

Die Kugel $k: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 22z - 103 = 0$ schneidet die Ebene $\varepsilon: 2x + 2y - z - 18 = 0$ in einem Kreis. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.

Aufgabe 8

Der Punkt $P(3, 1, -2)$ liegt auf einer Kugel k mit dem Radius $r = 3$. Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf der Geraden durch $A(1, 5, -3)$ und $B(0, 7, -2)$.

Wie lautet die Kugelgleichung?

Aufgabe 9

Bestimme die Gleichungen der Kugeln mit gegebenem Radius r , welche die Ebene ABC im Punkt P berühren.

(a) $r = 18$, $A(0, -2, 4)$, $B(-1, 2, -2)$, $C(-10, 6, 0)$, $P(3, -2, z)$

(b) $r = 42$, $A(6, 1, 0)$, $B(0, -3, 7)$, $C(-3, -3, 1)$, $P(10, y, 8)$

Aufgabe 10

Der Punkt P liegt auf der Kugel, die durch den Mittelpunkt M und den Radius r gegeben ist. Wie heisst die Gleichung der Tangentialebene der Kugel im Punkt P ?

(a) $M(1, -3, 0)$, $r = 5$, $P(1, 1, -3)$

(b) $M(3, 0, 1)$, $r = 5$, $P(3, -4, -2)$

Aufgabe 11

Bestimme die Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel k , die parallel zur Ebene ε sind.

(a) $k: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 49$, $\varepsilon: 3x + 2y - 6z = 0$

(b) $k: x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2z - 64 = 0$, $\varepsilon: 2x - 2y + z - 7 = 0$

Aufgabe 12

Ein von der Quelle $Q(5, 38, -7)$ in Richtung $P(3, 22, -6)$ ausgehender Lichtstrahl wird an der Kugel $k: (x - 3)^2 + (y + 8)^2 + z^2 = 225$ reflektiert.

- (a) Welche Koordinaten hat der Reflexionspunkt R ?
- (b) Bestimme eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls.
- (c) Wie gross ist der Winkel zwischen den Strahlen im Punkt R ?