Aufgabe 1

$M(-1,-2,-1)$

$$\overrightarrow{MP} = \vec{r}_P - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$r^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 + 9 + 81 = 91$$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 91$

Aufgabe 2

(a) quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 8z = -1 \\ &x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = -1 + 1 + 4 + 16 \\ &(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 20 \end{aligned}$$

$M(-1,2,4)$, $r = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

(b) keine Sphäre (wegen $-y^2$)

(c) quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 6z + 47 = 0 \\ &x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = -47 + 36 + 1 + 9 \\ &(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = -1 \end{aligned}$$

keine Sphäre (negativer Radius)

(d) keine Sphäre (Kreislinie in π_3)

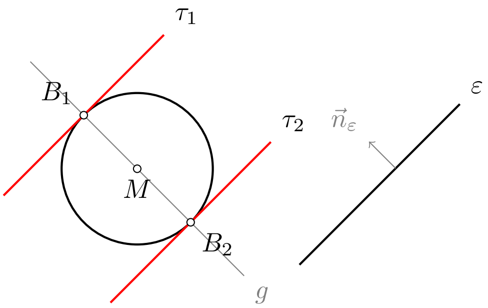
Aufgabe 3

$M(9,3,-1),\ r=\sqrt{62};\ g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
(x-9)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 &= \left(\sqrt{62}\right)^2\\
([12]-9)^2+([3+t]-3)^2+([4+t]+1)^2 &= 62\\
3^2+t^2+(t+5)^2 &= 62\\
9+t^2+t^2+10t+25 &= 62\\
2\,t^2+10\,t-28 &= 0\\
t^2+5\,t-14 &= 0\\
(t-2)(t+7) &= 0\\
t_1 &= 2\\
t_2 &= -7
\end{aligned}$$

Schnittpunkte: $P_1(12,5,6),\ P_2(12,-4,-3)$

Aufgabe 4



Sphäre: $k\colon (x-8)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 49$

Gerade durch M normal zu ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$K \cap g$:

$$\begin{aligned} ([8+2t]-8)^2 + ([1-6t]-1)^2 + ([z+3t]-3)^2 &= 49 \\ (2t)^2 + (-6t)^2 + (3t)^2 &= 49 \\ 49t^2 &= 49 \\ t^2 &= 1 \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= -1 \end{aligned}$$

Schnittpunkte: $S_1(10,-5,6)$, $S_2(6,7,0)$

Die Schnittpunkte der Geraden mit der Sphäre sind die Berührpunkte der Tangentialebenen τ_1 und τ_2.

$S_1(10,-5,6) \in \tau_1$: $d_1 = -\vec{n} \cdot \vec{r}_{S_1} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = -68$

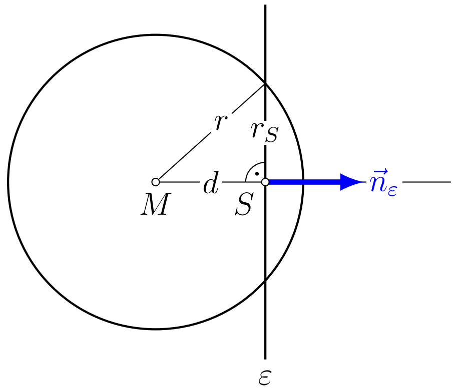
$\tau_1\colon 2x - 6y + 3z - 68 = 0$

$S_2(6,7,0) \in \tau_2$: $d_2 = -\vec{n} \cdot \vec{r}_{S_2} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 30$

$\tau_2\colon 2x - 6y + 3z + 30 = 0$

Aufgabe 5

Gegeben: $M(4, 7, 3)$ und $r = 9$



Gerade durch M normal zu ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 3(4 + 3t) + (7 + t) + 2(3 + 2t) + 3 &= 0 \\ 9t + t + 4t + 12 + 7 + 6 + 3 &= 0 \\ 14t + 28 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $S(-2, 5, -1)$

$$d = |\vec{r}_A - \vec{r}_M| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} < 9 = r \text{ (ok)}$$

Schnittkreisradius: $r_S = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{81 - 56} = \sqrt{25} = 5$

Der Schnittkreis hat den Mittelpunkt $S(-2, 5, -1)$ und den Radius $r_S = 5$.

Aufgabe 6

(a) $\overline{M_1M_2} = \left|(-14, 8, -6)^\intercal\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overline{M_1M_2} = 3\sqrt{2} < 5 = |r_1 - r_2|$

Die Kugeln liegen ineinander.

(b) $\overline{M_1M_2} = \left|(2, 11, 10)^\intercal\right| = 15$

$\overline{M_1M_2} = 15 = r_1 + r_2$

Die Kugeln berühren sich aussen.

(c) $|M_1M_2| = \left|(-3, 5, -8)^\intercal\right| = 7\sqrt{2}$

$|r_1 - r_2| = 4 < \overline{M_1M_2} < 10 = r_1 + r_2$

Die Kugeln schneiden sich.

(d) $|M_1M_2| = \left|(2, 6, 3)^\intercal\right| = 7$

$\overline{M_1M_2} = 7 = |r_1 - r_2|$

Die Kugeln berühren sich innen.

(e) $|M_1M_2| = \left|(4, -11, -4)^\intercal\right| = 3\sqrt{17}$

$\overline{M_1M_2} = 12.37 > 6 = r_1 + r_2$

Die Kugeln liegen auseinander.