Vektorgeometrie (I)

Lösungen+

Version vom 31. Januar 2022

Aufgabe 1.1

Die Menge aller gerichteten Strecken mit gleicher Länge.

Aufgabe 1.2

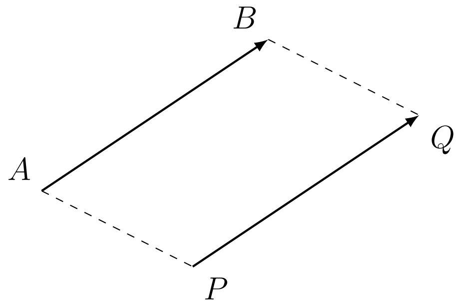
Falsch, denn $\overrightarrow{BA}$ ist Repräsentant des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$.

Aufgabe 1.3

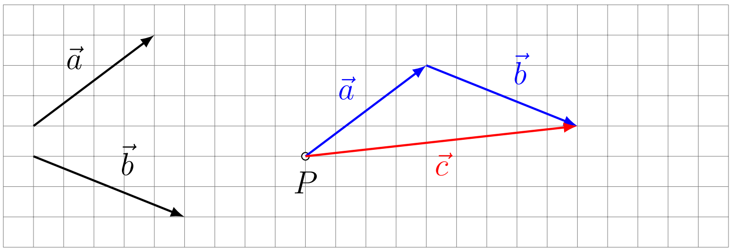
Falsch, denn es gibt zwar unendlich viele Repräsentanten zu einem Vektor aber nur einen mit Anfangspunkt P

Aufgabe 1.4

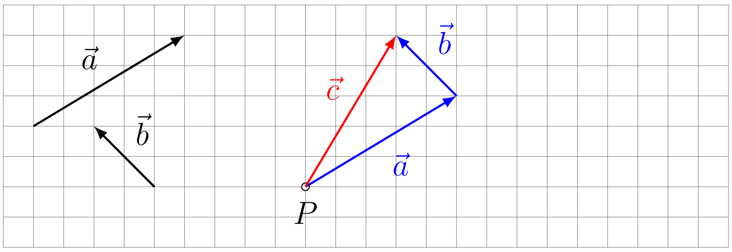
Wahr, wie man anhand der folgenden Skizze erkennen kann:



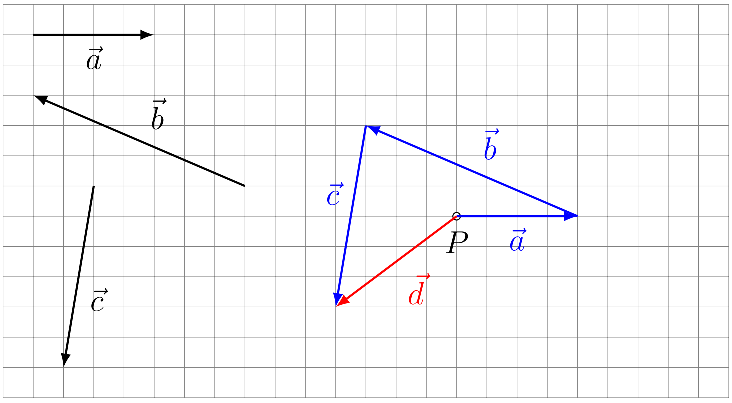
Aufgabe 1.5



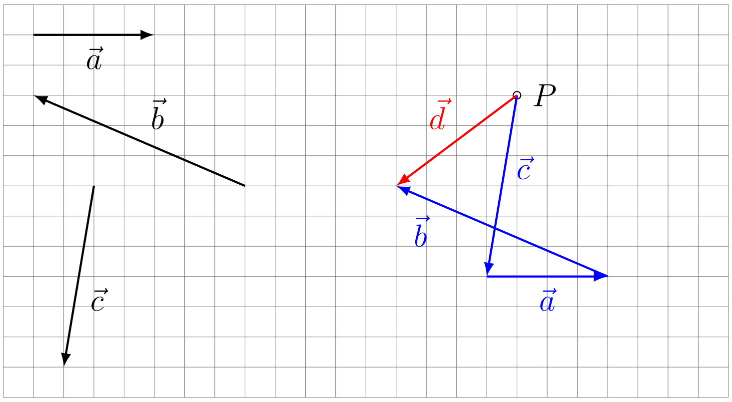
Aufgabe 1.6



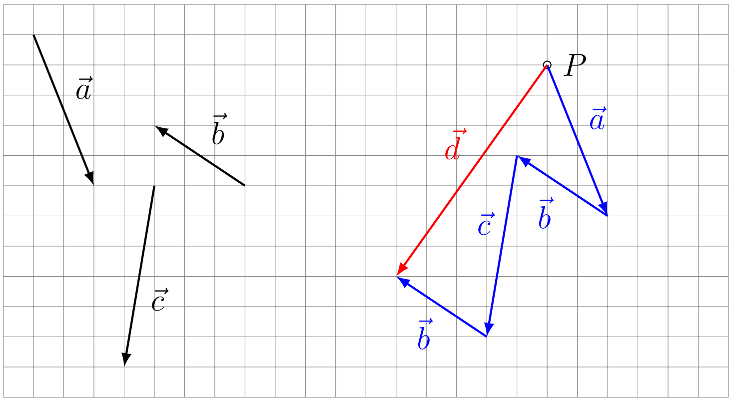
Aufgabe 1.7



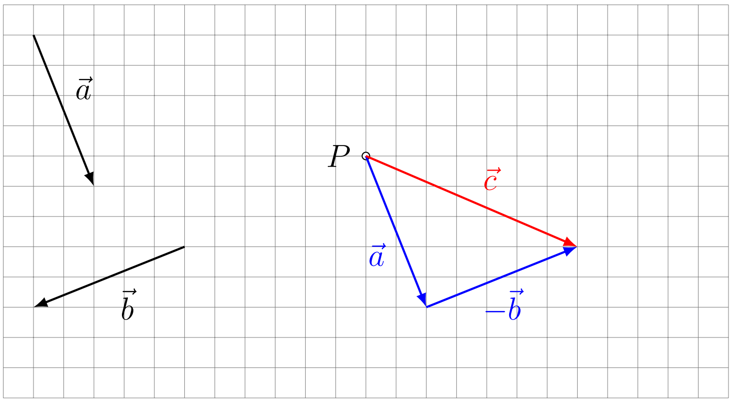
Aufgabe 1.8



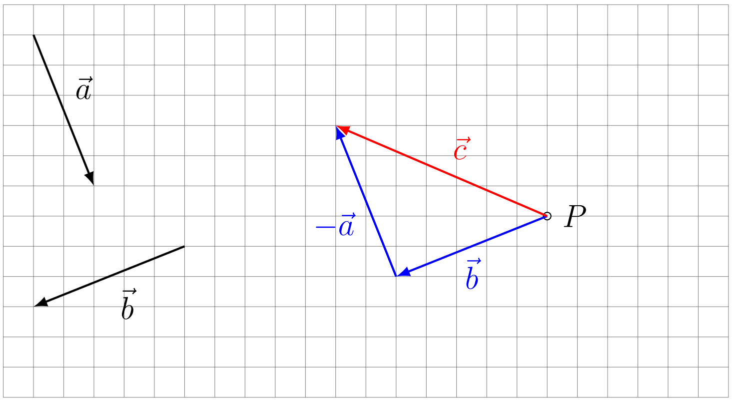
Aufgabe 1.9



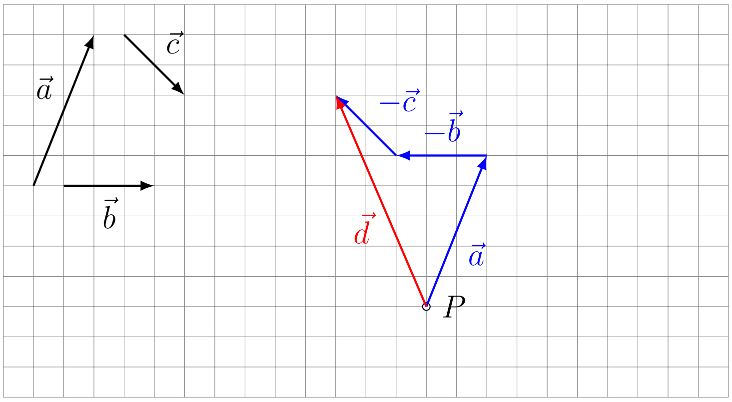
Aufgabe 1.10



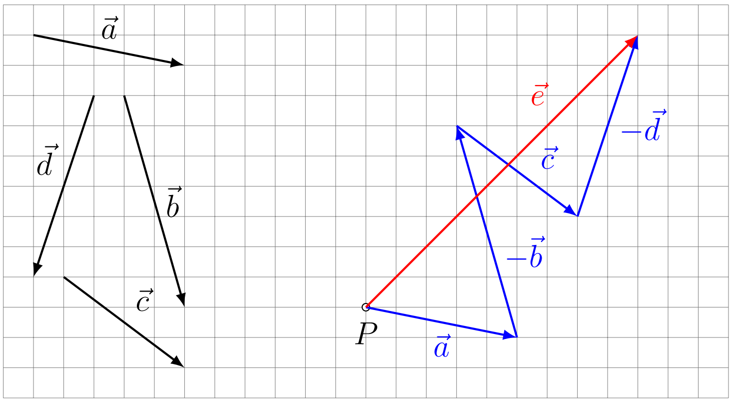
Aufgabe 1.11



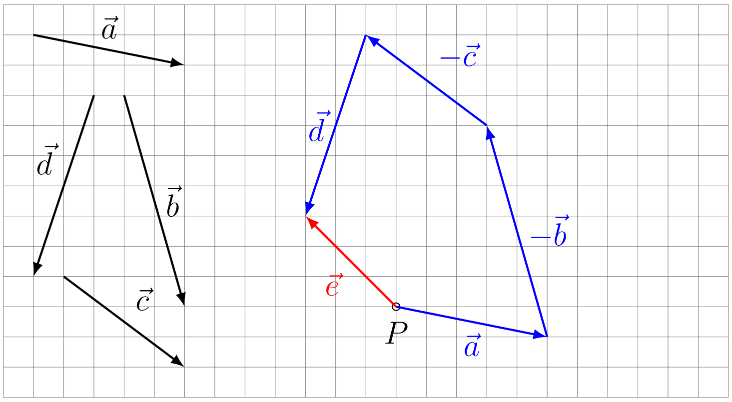
Aufgabe 1.12



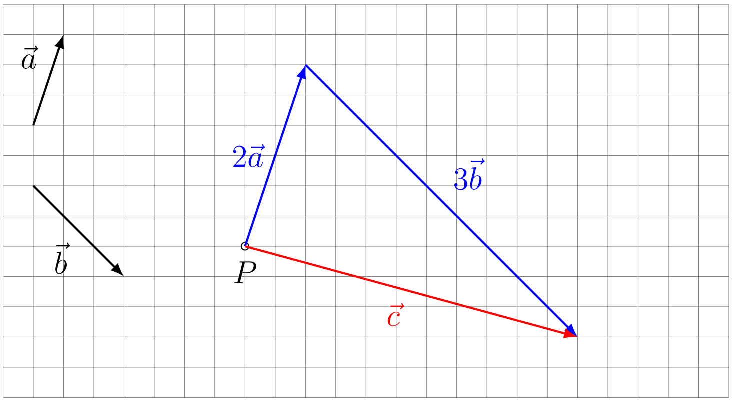
Aufgabe 1.13



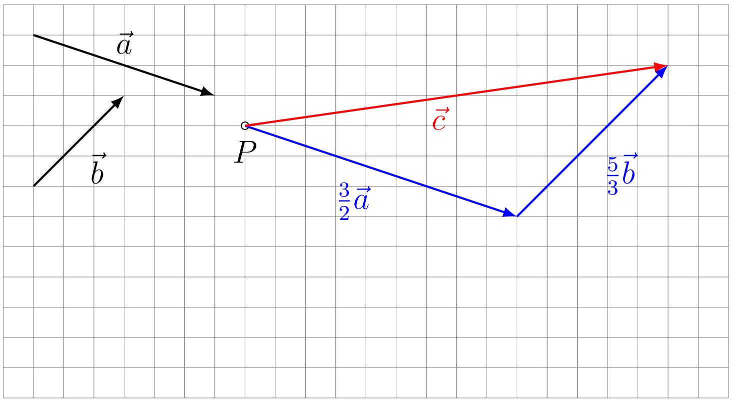
Aufgabe 1.14



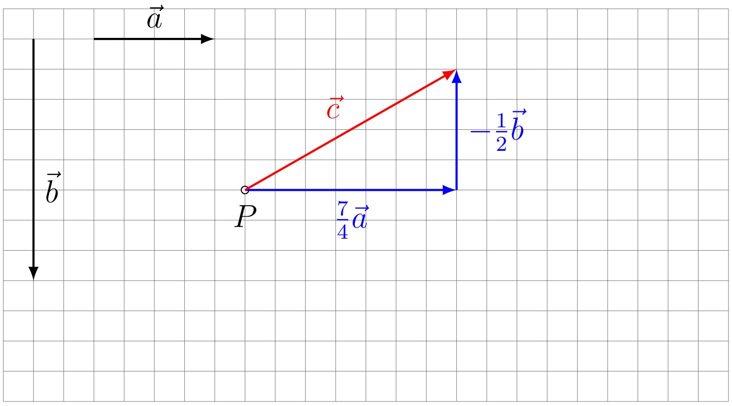
Aufgabe 1.15



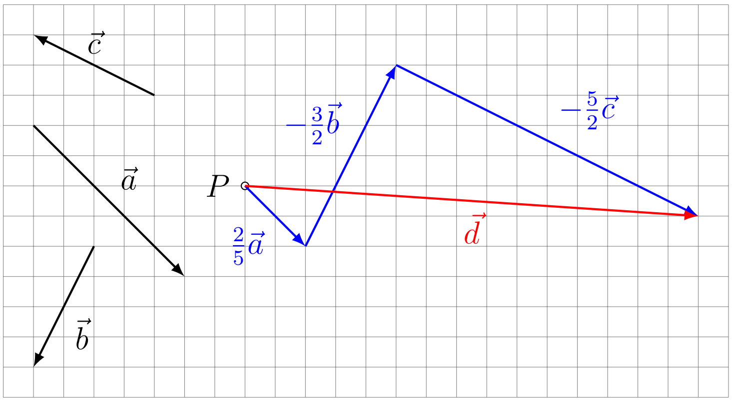
Aufgabe 1.16



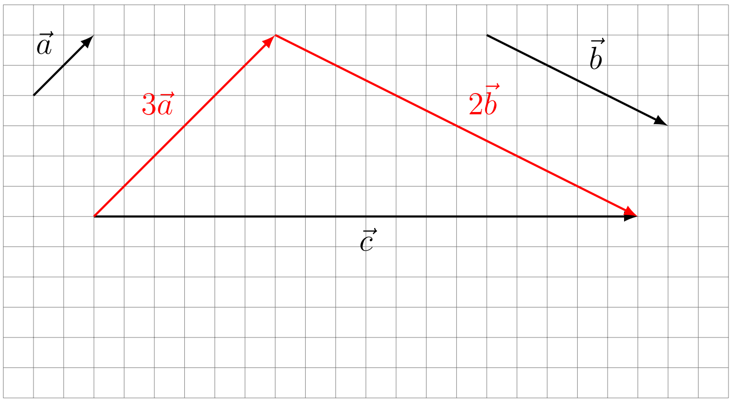
Aufgabe 1.17



Aufgabe 1.18

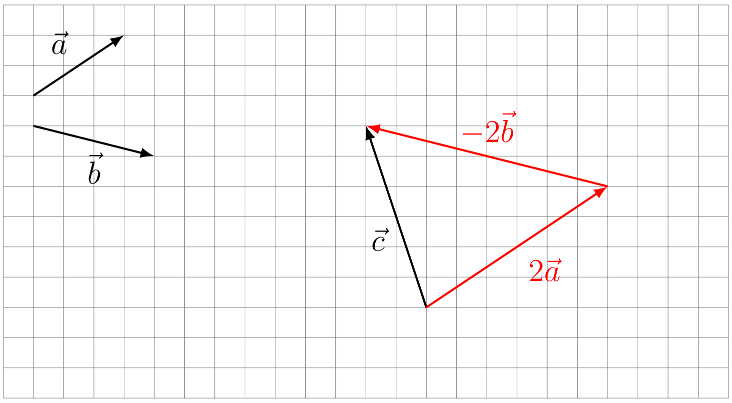


Aufgabe 1.19



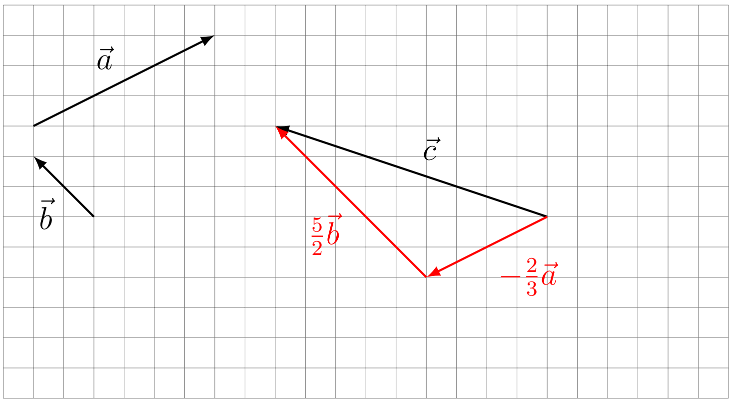
$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

Aufgabe 1.20



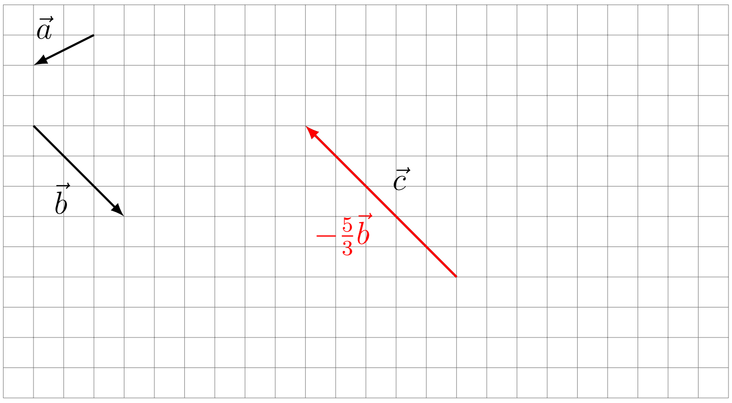
$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

Aufgabe 1.21



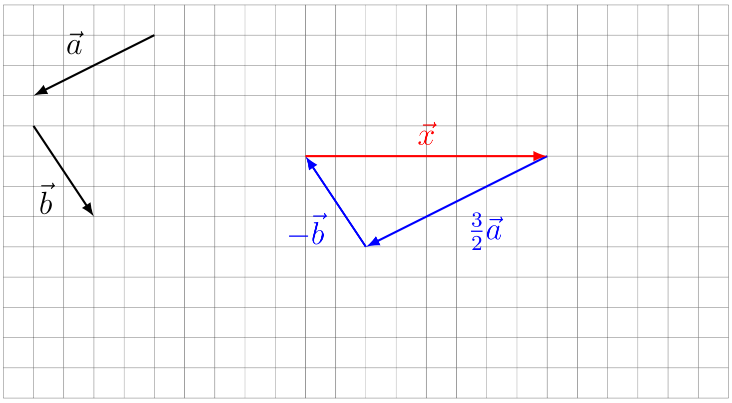
$\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}$

Aufgabe 1.22



$\vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{b}$

Aufgabe 1.23



Aufgabe 1.24

$$\begin{aligned}
3\vec{x} - 2\vec{a} + \vec{b} &= \tfrac{1}{2}\left(\vec{x} + 4\vec{a}\right) - 3\vec{b} && || \cdot 2 \\
6\vec{x} - 4\vec{a} + 2\vec{b} &= \vec{x} + 4\vec{a} - 6\vec{b} && || - \vec{x} + 4\vec{a} - 2\vec{b} \\
5\vec{x} &= 8\vec{a} - 8\vec{b} && || \cdot \tfrac{1}{5} \\
\vec{x} &= \tfrac{8}{5}\vec{a} - \tfrac{8}{5}\vec{b}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.25

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(2\vec{x} + \vec{b}\right) - \tfrac{3}{4}\left(3\vec{a} - \vec{x}\right) &= \tfrac{1}{4}\left(4\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{x} && || \cdot 4 \\
2\left(2\vec{x} + \vec{b}\right) - 3\left(3\vec{a} - \vec{x}\right) &= 4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{x} && \text{Distributivgesetz} \\
4\vec{x} + 2\vec{b} - 9\vec{a} + 3\vec{x} &= 4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{x} && || - 4\vec{x} - 2\vec{b} + 9\vec{a} \\
3\vec{x} &= 13\vec{a} - \vec{b} && || \cdot \tfrac{1}{3} \\
\vec{x} &= \tfrac{13}{3}\vec{a} - \tfrac{1}{3}\vec{b}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.26

$$
\begin{aligned}
2\big(\vec{x}-\vec{a}\big)-3\big(2\vec{a}-5\vec{b}\big) &= \tfrac{1}{2}\big(\vec{x}-2\vec{b}\big) && ||\cdot 2\\
4\big(\vec{x}-\vec{a}\big)-6\big(2\vec{a}-5\vec{b}\big) &= \vec{x}-2\vec{b} && \text{Distributivgesetz}\\
4\vec{x}-4\vec{a}-12\vec{a}+30\vec{b} &= \vec{x}-2\vec{b} && ||-\vec{x}+16\vec{a}-30\vec{b}\\
3\vec{x} &= 16\vec{a}-32\vec{b} && ||\cdot\tfrac{1}{3}\\
\vec{x} &= \tfrac{16}{3}\vec{a}-\tfrac{32}{3}\vec{b}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.27

$\overrightarrow{BC} = -\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}-\vec{u}$

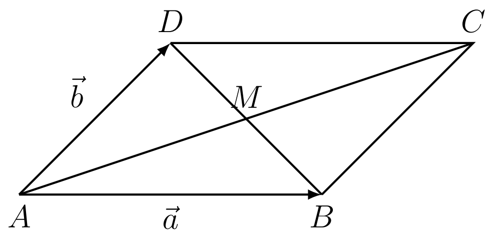
$\overrightarrow{CB} = -\vec{v}+\vec{u}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \vec{u}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u}+\tfrac{1}{2}\big(-\vec{u}+\vec{v}\big)\\
&= \vec{u}-\tfrac{1}{2}\vec{u}+\tfrac{1}{2}\vec{v} = \tfrac{1}{2}\vec{u}+\tfrac{1}{2}\vec{v}
\end{aligned}
$$

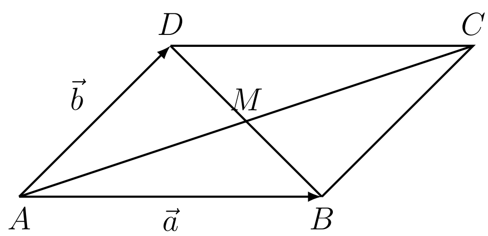
$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\tfrac{1}{2}\vec{u}-\tfrac{1}{2}\vec{v}$

Aufgabe 1.28

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$



$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = \vec{b}-\vec{a} = -\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$



$\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{2}\big(\vec{a}+\vec{b}\big) = \tfrac{1}{2}\vec{a}+\tfrac{1}{2}\vec{b}$
$\overrightarrow{MB} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\tfrac{1}{2}\big(\vec{b}-\vec{a}\big) = \tfrac{1}{2}\vec{a}-\tfrac{1}{2}\vec{b}$

Aufgabe 1.29

$\overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{FD} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\left(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
$\overrightarrow{EK} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{BG} = \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$
$\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{HF} = \vec{a} - \vec{b}$

Aufgabe 1.31

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

Aufgabe 1.32

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Aufgabe 1.33

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Aufgabe 1.34

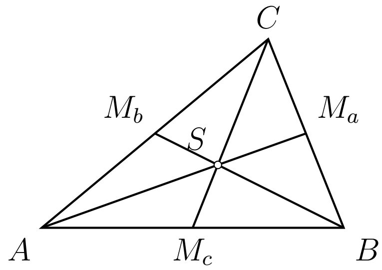
$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$

Aufgabe 1.35

$\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XY} = 2\overrightarrow{XY}$

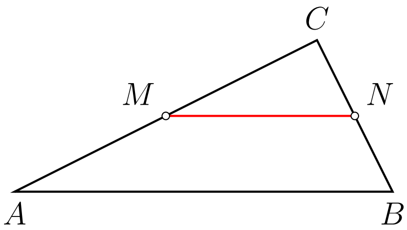
Aufgabe 1.36

Im Dreieck teilt der Schwerpunkt die Schwerlinien, von der Ecke aus gemessen, im Verhältnis $2:1$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} &= \tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_aA}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_bB}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_cC}\\ &= \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\big)+\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\big)+\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\big)\\ &= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}\end{aligned}$$

Zu zeigen: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

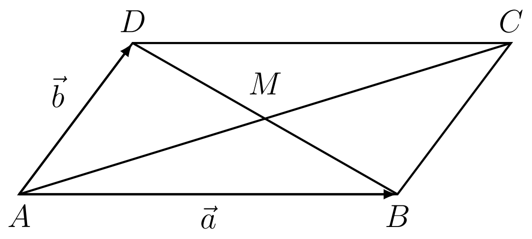


$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\big)=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\quad \text{W.z.b.w.}\end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

$\vec{a} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{l}$, $\vec{b} = -1 \cdot \vec{h}$, $\vec{c} = 2 \cdot \vec{g}$, $\vec{d} = \frac{3}{5} \cdot \vec{e}$

Aufgabe 2.2



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

(b) geschlossene Vektorkette, die den Punkt M enthält:

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$
$$\overrightarrow{MD} = \beta \cdot \overrightarrow{BD} = \beta \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$
$$\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ \alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \beta \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{b} &= \vec{0} \\ (\alpha - \beta) \cdot \vec{a} + (\alpha + \beta - 1) \cdot \vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

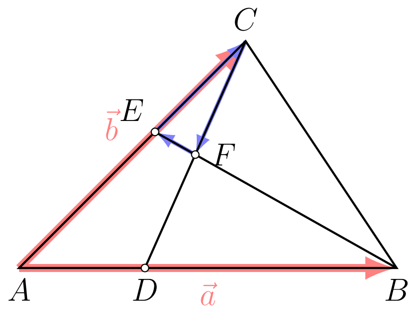
(e) Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 0 \\ \alpha + \beta - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{(was man erraten konnte)}$$

(f) Geometrische Interpretation:

Der Punkt M teilt die Strecken AC und BD im Verhältnis $1 : 1$.

Aufgabe 2.3



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt F enthält:

$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$\overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{CF} = \alpha\overrightarrow{CD} = \alpha\left(-\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) = -\alpha\vec{b} + \frac{1}{3}\alpha\vec{a}$

$\overrightarrow{FE} = \beta\overrightarrow{BE} = \beta\left(-\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right) = -\beta\vec{a} + \frac{3}{5}\beta\vec{b}$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} &= \vec{0} \\ \tfrac{2}{5}\vec{b} - \alpha\vec{b} + \tfrac{1}{3}\alpha\vec{a} - \beta\vec{a} + \tfrac{3}{5}\beta\vec{b} &= \vec{0} \\ \left(\tfrac{1}{3}\alpha - \beta\right)\vec{a} + \left(\tfrac{2}{5} - \alpha + \tfrac{3}{5}\beta\right)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

(d) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\alpha - \beta &= 0 \\ \tfrac{2}{5} - \alpha + \tfrac{3}{5}\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{3}\alpha - \beta &= 0 \\ -\alpha + \tfrac{3}{5}\beta &= -\tfrac{2}{5} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \beta &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt F teilt die Strecke BE im Verhältnis $5:1$.
- Der Punkt F teilt die Strecke CD im Verhältnis $1:1$.

Aufgabe 2.4

(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt F enthält:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BD} = \alpha\big(-\vec{a} + \tfrac{1}{4}\vec{b}\big) = -\alpha\vec{a} + \tfrac{1}{4}\alpha\vec{b}$

$\overrightarrow{FA} = \beta\overrightarrow{EA} = \beta\big(\tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \vec{b}\big) = \beta\big(\tfrac{1}{3}\big(-\vec{a} + \vec{b}\big) - \vec{b}\big) = -\tfrac{1}{3}\beta\vec{a} - \tfrac{2}{3}\beta\vec{b}$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} &= \vec{0} \\
\vec{a} - \alpha\vec{a} + \tfrac{1}{4}\alpha\vec{b} - \tfrac{1}{3}\beta\vec{a} - \tfrac{2}{3}\beta\vec{b} &= \vec{0} \\
\big(1 - \alpha - \tfrac{1}{3}\beta\big)\vec{a} + \big(\tfrac{1}{4}\alpha - \tfrac{2}{3}\beta\big)\vec{b} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha - \tfrac{1}{3}\beta &= 0 \\ \tfrac{1}{4}\alpha - \tfrac{2}{3}\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} -3\alpha - \beta &= -3 \\ 3\alpha - 8\beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{8}{9} \\ \beta &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt F teilt die Strecke AE im Verhältnis $1 : 2$.
- Der Punkt F teilt die Strecke BD im Verhältnis $8 : 1$.

Aufgabe 2.5

(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt F enthält:

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AF} = \alpha\big(\vec{b} + \tfrac{2}{3}\vec{a}\big) = \alpha\vec{b} + \tfrac{2}{3}\alpha\vec{a}$$

$$\overrightarrow{GD} = \beta\overrightarrow{ED} = \beta\big(\tfrac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}\big) = \tfrac{3}{4}\beta\vec{b} - \beta\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ \alpha\vec{b} + \tfrac{2}{3}\alpha\vec{a} + \tfrac{3}{4}\beta\vec{b} - \beta\vec{a} - \vec{b} &= \vec{0} \\ \big(\tfrac{2}{3}\alpha - \beta\big)\vec{a} + \big(\alpha + \tfrac{3}{4}\beta - 1\big)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

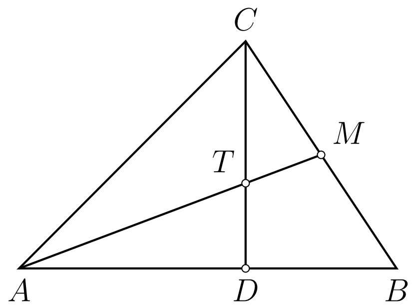
(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}\alpha - \beta &= 0 \\ \alpha + \tfrac{3}{4}\beta - 1 &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= 0 \\ 4\alpha + 3\beta - 4 &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{2}{3} \\ \beta &= \tfrac{4}{9} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt G teilt die Strecke AF im Verhältnis $2:1$.
- Der Punkt G teilt die Strecke DE im Verhältnis $4:5$.

Aufgabe 2.6



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt T enthält:

$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AT} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AM} = \tfrac{3}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\right] = \tfrac{3}{8}\vec{a} + \tfrac{3}{8}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{TC} = \alpha\overrightarrow{DC} = \alpha\big(-\beta\vec{a} + \vec{b}\big) = -\alpha\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CA} &= \vec{0} \\ \tfrac{3}{8}\vec{a} + \tfrac{3}{8}\vec{b} - \alpha\beta\vec{a} + \alpha\vec{b} - \beta\,\vec{a} &= \vec{0} \\ \big(\tfrac{3}{8} + \alpha\beta - \beta\big)\vec{a} + \big(\tfrac{3}{8} + \alpha\big)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

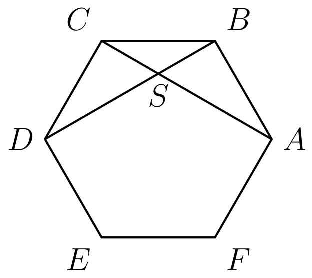
(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{8} + \alpha\beta - \beta &= 0 \\ \tfrac{3}{8} + \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{3}{5} \\ \beta &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt T teilt die Strecke CD im Verhältnis $3:2$.
- (Der Punkt D teilt die Strecke AB im Verhältnis $3:2$.)

Aufgabe 2.7



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$

(b) Geschlossene Vektorkette via S:

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\big(-\vec{a} + \vec{b}\big) = -\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$\overrightarrow{SD} = \beta\overrightarrow{BD} = \beta\big(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\big) = -\frac{1}{2}\beta\vec{a} - \beta\vec{b}$

(d) Einsetzen und nach Vektoren sortieren:

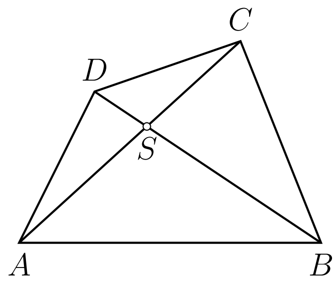
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} &= \vec{0} \\ \vec{a} - \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} - \tfrac{1}{2}\beta\vec{a} - \beta\vec{b} &= \vec{0} \\ (1 - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

(e) Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 2 - 2\alpha - \beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{2}{3} \\ \beta &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:
Die Strecken AC und DB teilen sich im Verhältnis $2 : 1$.

Aufgabe 2.8



(a) Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

(b) Geschlossene Vektorkette, die den Punkt S enthält:

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

(c) Die Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken:

$$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha\big(\tfrac{2}{5}\vec{a} + \tfrac{4}{3}\vec{b}\big) = \tfrac{2}{5}\alpha\vec{a} + \tfrac{4}{3}\alpha\vec{b}$$

$$\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{DB} = \beta\big(-\vec{b} + \vec{a}\big) = \beta\vec{a} - \beta\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$

(d) Einsetzen und nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen:

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

$$\tfrac{2}{5}\alpha\vec{a} + \tfrac{4}{3}\alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$\big(\tfrac{2}{5}\alpha + \beta - 1\big)\vec{a} + \big(\tfrac{4}{3}\alpha - \beta\big)\vec{b} = \vec{0}$$

(e) Lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}\alpha + \beta - 1 &= 0 \\ \tfrac{4}{3}\alpha - \beta &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \tfrac{2}{5}\alpha + \tfrac{4}{3}\alpha = 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{15}{26} \\ \beta &= \tfrac{10}{13} \end{aligned}$$

(f) Geometrische Interpretation:

- Der Punkt S teilt die Diagonale AC im Verhältnis $15 : 11$.
- Der Punkt S teilt die Diagonale BD im Verhältnis $10 : 3$.

Aufgabe 3.1

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+7 \\ 1+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-4) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3

$$\vec{v} = -6\begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.4

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 32 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6

$$\vec{v} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 0 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 33 \\ 2 \\ -15 \\ -28 \end{pmatrix}$$

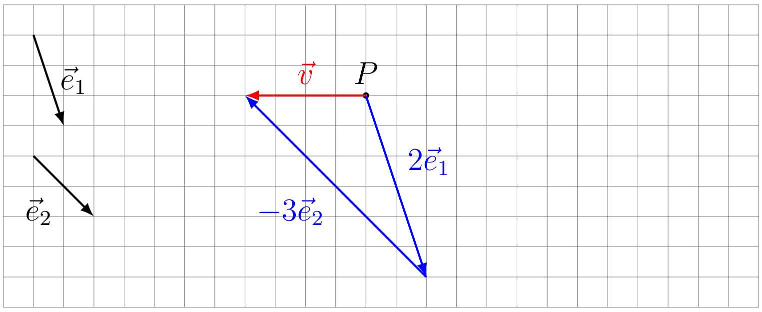
Aufgabe 3.7

$$\begin{aligned} 4 &= x - 5 \\ y &= -3 + 2y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

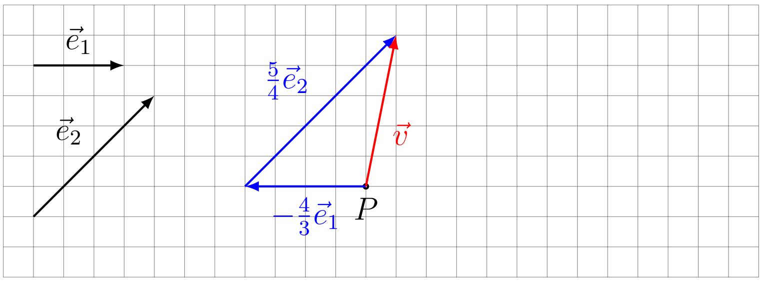
Aufgabe 3.8

$$\begin{aligned} x &= 1 - (0 - 2x) \\ -3 &= 2y - (y - 4) \\ z &= 2 - (3z + 1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2x \\ -3 &= y + 4 \\ z &= 1 - 3z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -7 \\ z &= 1/4 \end{aligned}$$

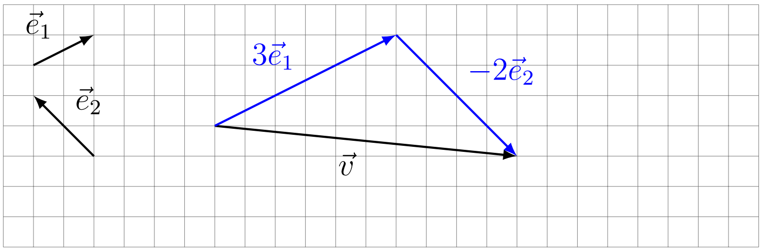
Aufgabe 3.9



Aufgabe 3.10

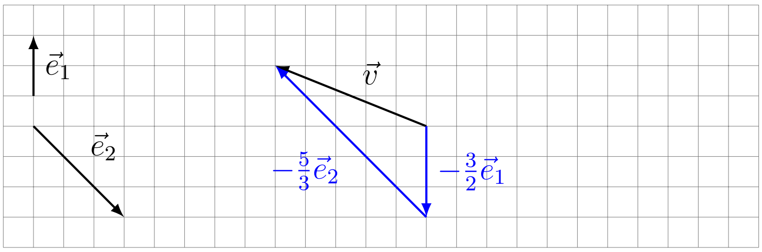


Aufgabe 3.11



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.12



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13

$2\vec{x} = \vec{0} - \vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$$2\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.14

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \\ 5 & 20 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ linear abhängig (kollinear)

Aufgabe 3.15

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ linear unabhängig

Aufgabe 3.16

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 16 & -24 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ linear abhängig (kollinear)

Aufgabe 3.17

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ linear abhängig (komplanar)

Aufgabe 3.18

Hat die Gleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$

- nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$: linear unabhängig
- daneben noch weitere Lösungen: linear abhängig

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow$ linear unabhängig

Aufgabe 3.19

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

Aufgabe 3.20

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 5 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$

Aufgabe 3.21

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = 9\vec{b} - 7\vec{c}$

(Vektor $\vec{a}$ wird für die Darstellung nicht benötigt.)