Vektorgeometrie (I)

Theorie

Version vom 31. Januar 2022

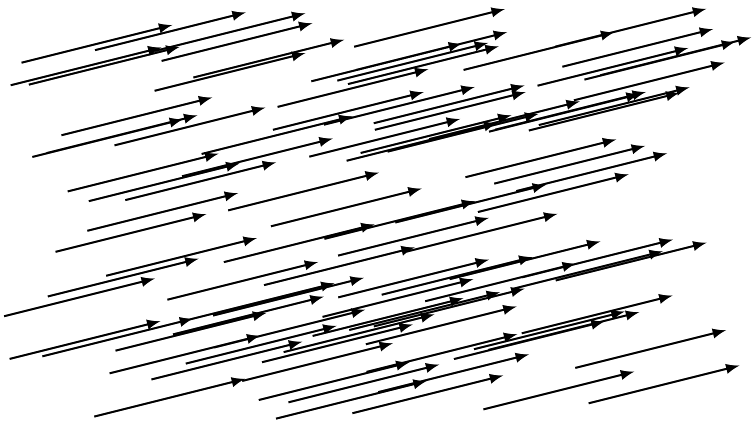
Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Der Vektorbegriff

Ein *Vektor* ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung. Vektoren bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben, über die ein Pfeil gesetzt wird ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, ...).

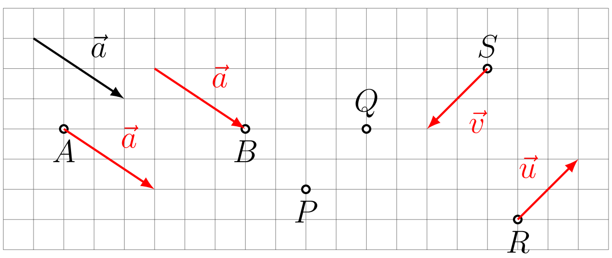
Ein einzelner Pfeil wird *Repräsentant* des Vektors genannt. Repräsentanten werden durch ihren Anfangs- und Endpunkt dargestellt, über die ein Pfeil gezeichnet wird (z. B. $\overrightarrow{AB}$).



Übung 1.1

Zeichne den Repräsentanten ...

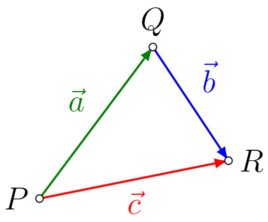
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



1.2 Die Vektoraddition

Definition der Summe $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ zweier Vektoren:

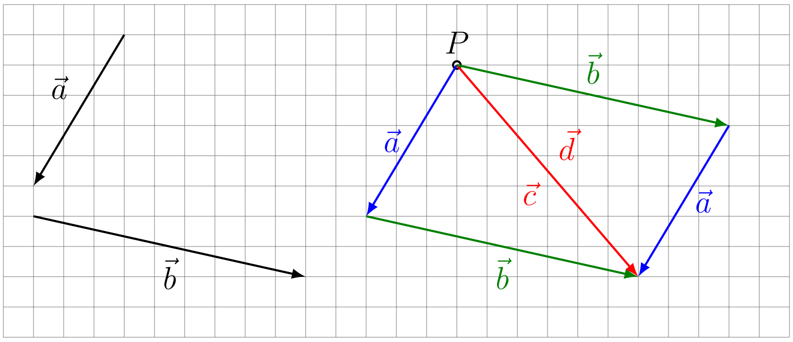
- Wähle einen beliebigen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.
- Wähle den Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$, der in Q beginnt.
- $\overrightarrow{PR}$ ist ein Repräsentant von $\vec{c}$



Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl des Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$. Dadurch ist $\vec{c}$ eindeutig bestimmt.

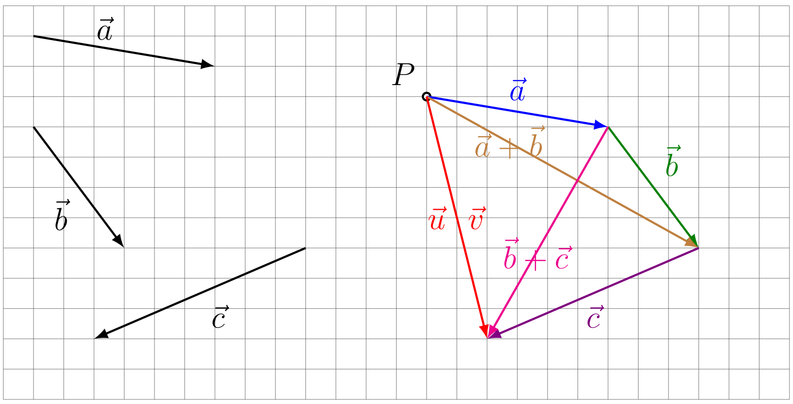
1.3 Eigenschaften

Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



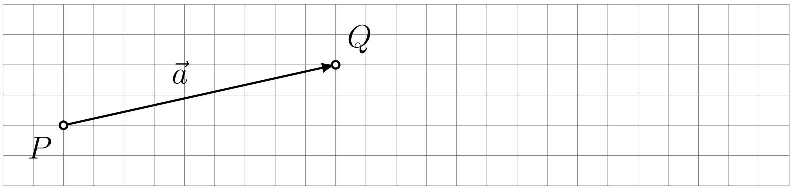
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Das Kommutativgesetz gilt.

Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ Das Assoziativgesetz gilt.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?



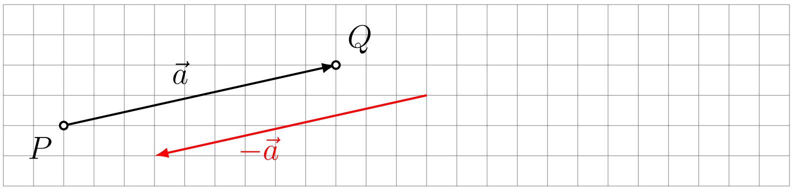
Anfangs- und Endpunkt von $\vec{x}$ fallen zusammen.

$\vec{x} = \overrightarrow{QQ} = \vec{0}$ heisst *Nullvektor*.

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$

$\vec{0}$ ist das *neutrale Element* der Vektoraddition.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?



$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

$\vec{x}$ ist der *Gegenvektor* von $\vec{a}$.

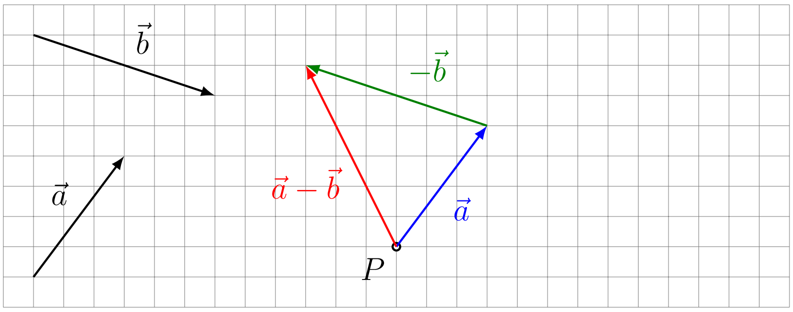
$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ für alle Vektoren $\vec{a}$

$-\vec{a}$ ist das *inverse Element* der Vektoraddition.

1.4 Die Vektorsubtraktion

Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

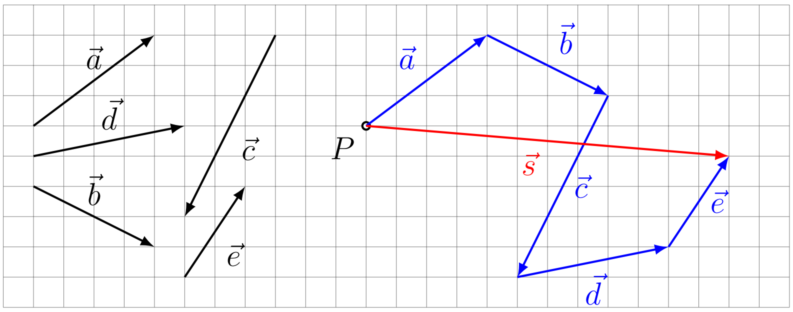


$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

Man subtrahiert einen Vektor, indem man seinen Gegenvektor addiert.

1.5 Vektorketten

Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



In der Physik heisst $\vec{s}$ *Resultierende* (z. B. von Kräften).

Gilt $\vec{s} = \vec{0}$, dann ist die Vektorkette *geschlossen*.

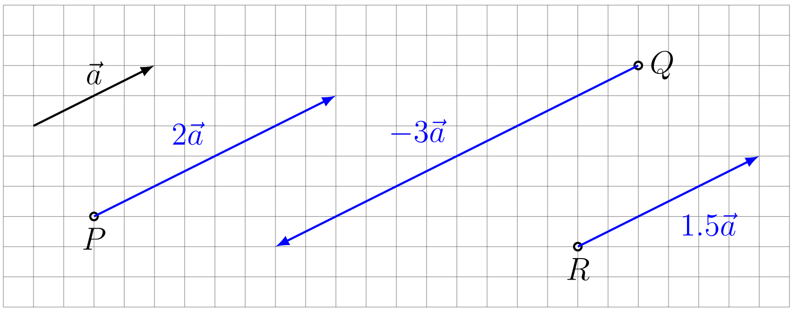
1.6 Die s-Multiplikation

Zeichne Repräsentanten folgender Vektoren:

(a) das 2-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt P

(b) das -3-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt Q

(c) das 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt R



Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

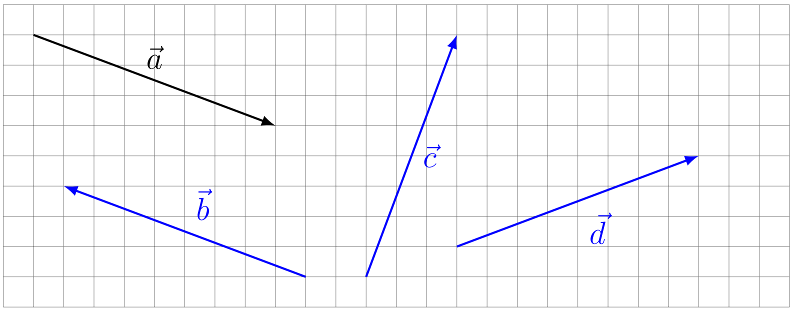
Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

1.7 Länge eines Vektors

Mit $|\vec{a}|$ oder $\|\vec{a}\|$ oder a bezeichnet man die *Länge* (oder *Norm*) des Vektors $\vec{a}$.

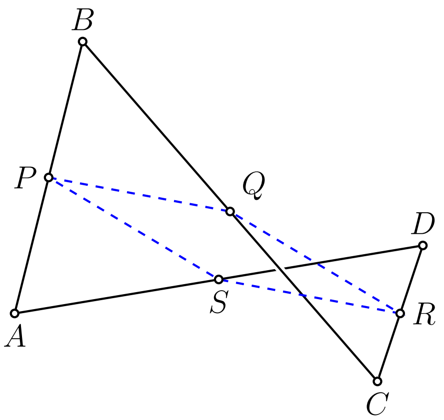
Zeichne Repräsentanten von drei verschiedenen Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die alle die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben.



1.8 Beispiele

Räumliches Viereck

Zeige, dass die Seitemitten P, Q, R und S des räumlichen Vierecks $ABCD$ ein Parallelogramm bilden.



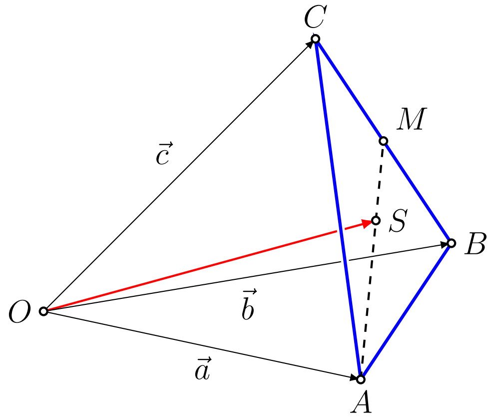
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Wegen $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$ sind die Strecken PQ und SR parallel und gleich lang. (w.z.b.w.)

Schwerpunkt eines Dreiecks

Drücke den Vektor $\overrightarrow{OS}$ von O zum Schwerpunkt S des Dreiecks ABC durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}[-\vec{b} + \vec{c}]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

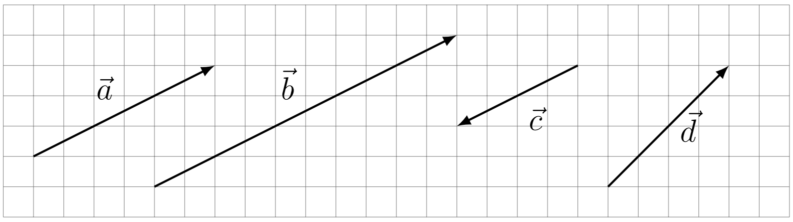
$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

2 Lineare Unabhängigkeit

2.1 Kollineare Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer gemeinsamen Geraden sind.

Sind zwei Vektoren *nicht kollinear*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.



$\vec{a}$ ist kollinear zu $\vec{b}$, $\vec{a}$ ist kollinear zu $\vec{c}$ und $\vec{b}$ ist kollinear zu $\vec{c}$.

$\vec{d}$ ist zu keinem der übrigen Vektoren kollinear.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

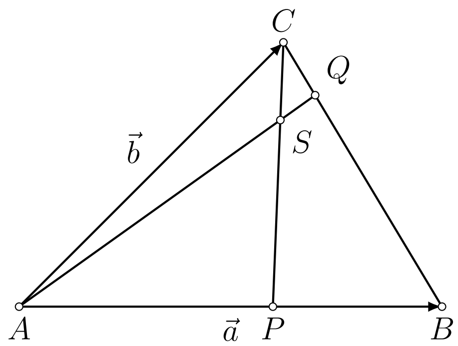
$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ besitzt.

Der Ausdruck $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ wird *Linearkombination* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt.

Anschaulich: Wollen wir mit linear unabhängigen Vektoren einen Weg beschreiben, der uns an den Anfangspunkt zurückführt, so ist dies nur möglich, indem wir gar nicht erst losgehen.

2.2 Anwendung



P teilt AB im Verhältnis $3:2$

Q teilt BC im Verhältnis $4:1$.

In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecken AQ und CP?

Schritt 1

Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

Zum Beispiel: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

Schritt 2

Wahl einer geschlossene Vektorkette, die den Punkt S enthält:

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \beta \cdot (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA}) = \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot [-\vec{a} + \vec{b}] - \vec{b}\right) = -\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right) + \left(-\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} - \frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen und ausklammern:

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta\right) \cdot \vec{a} + \left(\alpha - \frac{4}{5}\beta\right) \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$

$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$

$$\begin{vmatrix} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - 4\beta = 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix}$$

$4 \cdot \text{(I)} + \text{(II)}: 17\alpha = 12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{12}{17}$

$\text{(I)}: 3 \cdot \frac{12}{17} + \beta = 3 \quad \Rightarrow \quad 36 + 17\beta = 51 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{15}{17}$

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$

- S teilt CP im Verhältnis $5 : 12$
- S teilt AQ im Verhältnis $15 : 2$

2.3 Drei Vektoren

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *komplanar* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer Ebene sind.

Sind drei Vektoren *nicht komplanar*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

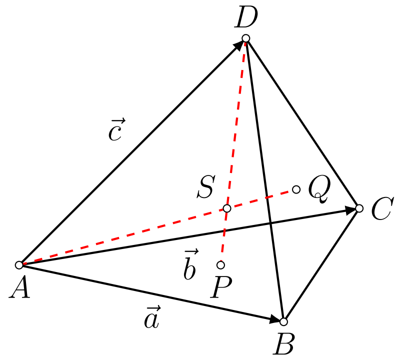
$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ besitzt.

Anschaulich: Wollen wir mit linear unabhängigen Vektoren einen Weg beschreiben, der uns an den Anfangspunkt zurückführt, so ist dies nur möglich, indem wir gar nicht erst losgehen.

2.4 Anwendung

Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit den Dreieckschwerpunkten P und Q, sowie den entsprechenden Schwerlinien DP und AQ.



Schneiden sich die Schwerlinien im Schwerpunkt S? Wenn ja, in welchem Verhältnis teilen sie sich?

Schritt 1

Wähle 3 linear unabhängige Vektoren. Zum Beispiel:

- $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$
- $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$

Schritt 2

Wähle eine geschlossene Vektorkette, die S enthält:

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP} = y\left(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}[-\vec{c} + \vec{a}] + \frac{1}{3}[-\vec{c} + \vec{b}]\right)$$

$$= \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Schritt 4

Einsetzen und ordnen:

$$\frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c} + \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{3}x - y\right)\vec{c} = \vec{0}$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} \\ y &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Schritt 6

Geometrische Deutung:

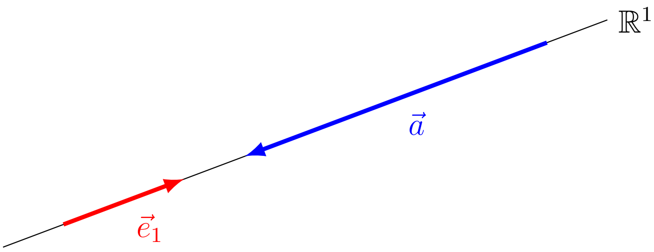
Kein Widerspruch $\Rightarrow$ die Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt.

$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AQ} \quad \Rightarrow \quad S$ teilt AQ im Verhältnis $3:1$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DP} \quad \Rightarrow \quad S$ teilt DP im Verhältnis $3:1$

3 Basisvektoren

3.1 Eindimensionaler Raum

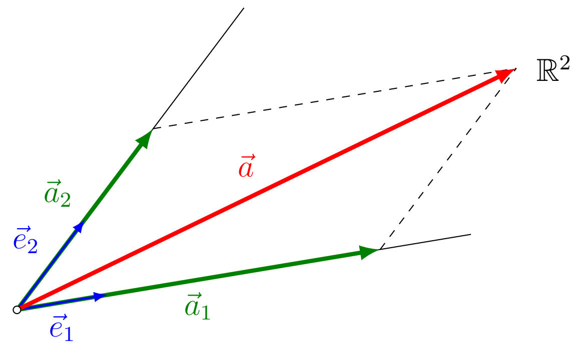


Gegeben: ein Basisvektor $\vec{e}_1$ (frei wählbar, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$)

Jeder andere Vektor in $\mathbb{R}^1$ ist *kollinear* zu $\vec{e}_1$.

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{[im Bild: } \vec{a} = -2.5 \cdot \vec{e}_1\text{]}$$

3.2 Zweidimensionaler Raum



Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)

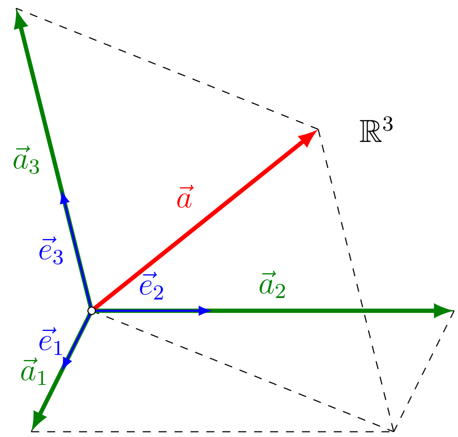
Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{[im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1\text{]}$$
$$\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{[im Bild: } \vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{e}_2\text{]}$$

Die Zahlen a_1 und a_2 sind die *skalaren Komponenten* von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. (Skalar = Zahl)

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\text{Komponentendarstellung von } \vec{a}}$$

3.3 Dreidimensionaler Raum



Gegeben: drei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (frei wählbar, nicht komplanar)

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

a_1, a_2, a_3: skalare Komponenten von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: Komponentendarstellung von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

3.4 Die Vektoroperationen in der Komponentendarstellung

Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$$

sind durch ihre skalaren Komponenten bezüglich der *gleichen Basis* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ gegeben.

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0} \end{aligned}$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 = 0 \quad &\text{und} \quad a_2 - b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 - b_3 = 0 \\ a_1 = b_1 \quad &\text{und} \quad \quad \ \ a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad \quad \ \ a_3 = b_3 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = b_3$$

Moral: Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in allen skalaren Komponenten übereinstimmen.

Vektoraddition

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \\ &= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_3\vec{e}_3 \\ &= (a_1 + b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vektorsubtraktion

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - \big(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\big) \\ &= a_1\vec{e}_1 - b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 - b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - b_3\vec{e}_3 \\ &= (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \vec{a} &= \alpha \cdot \big(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3\big) \\ &= \alpha \cdot a_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha \cdot a_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha \cdot a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spezialfälle

$$\begin{aligned} (-1) \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

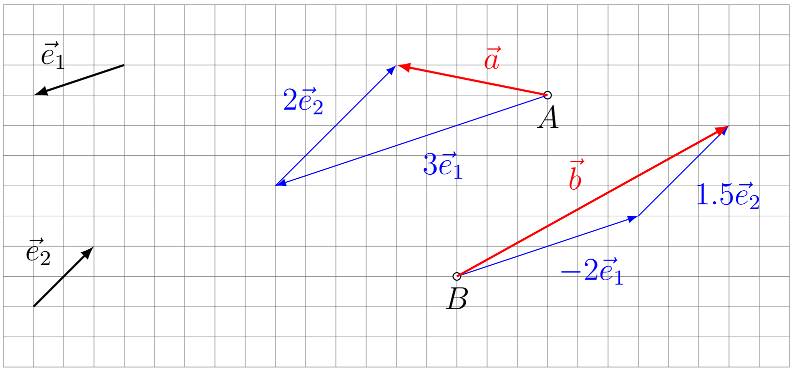
$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Beispiele

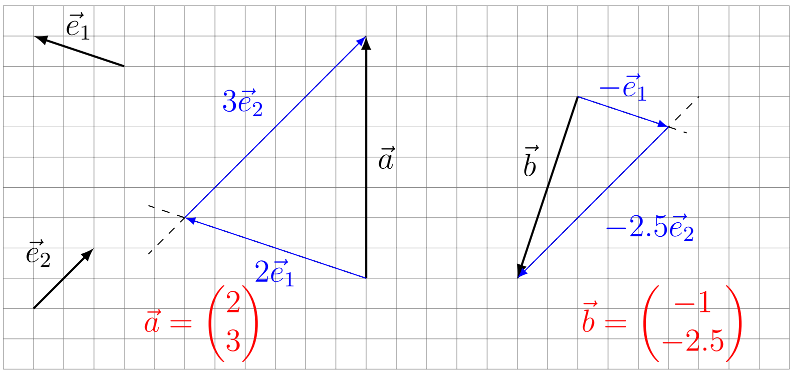
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha - 1.5\beta &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen ($\alpha = 1.5\beta$, mit β beliebig)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{„nur“}}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *nicht* komplanar (linear *un*abhängig).

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = 3\vec{a} + 14\vec{b} + 5\vec{c}$

Vektorgleichungen

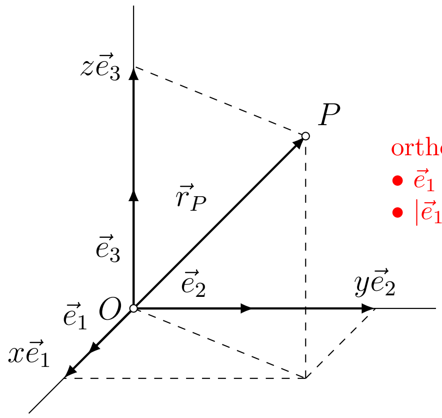
Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d} \\
&= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix} = \vec{v}
\end{aligned}$$

4 Ortsvektoren



orthonormiert:
- $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ und $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ und $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$
- $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

Drei orthonormierte Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und eine Punkt O (Origo, Ursprung, Nullpunkt) definieren ein rechtwinkliges (kartesisches) Koordinatensystem des Raumes.

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

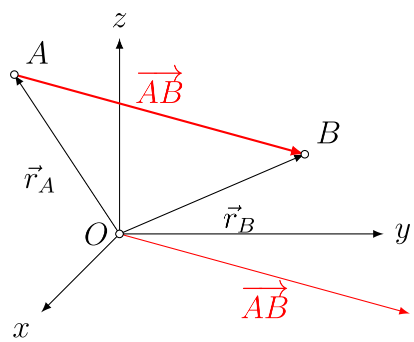
$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y, z)$$

Merke: Die Koordinaten des Punktes P sind die die Komponenten des zughörigen Ortsvektors $\vec{r}_P$

Vektor zwischen zwei Punkten

Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

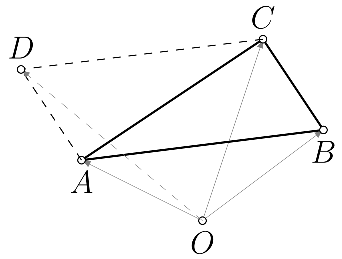
Gesucht: $\overrightarrow{AB} =?$



$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ („Endpunkt minus Anfangspunkt“)

Beispiel

Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.

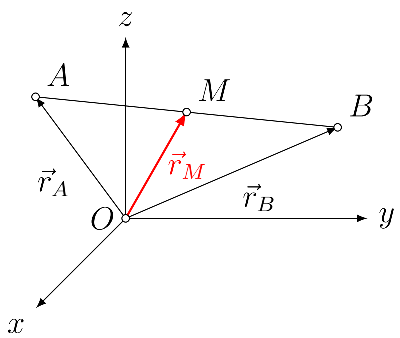


$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad D(-7,1,1)$

4.1 Schwerpunkte

Mittelpunkt einer Strecke



$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(-\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B$$
$$= \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Beispiel

$M(4,-3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1,5,7)$. Bestimme B.

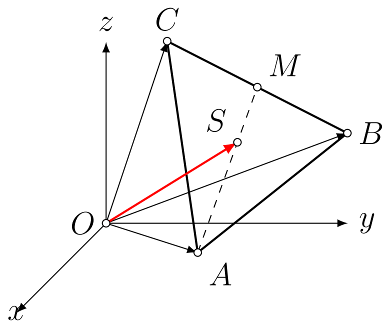
$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B(9,-11,-3)$$

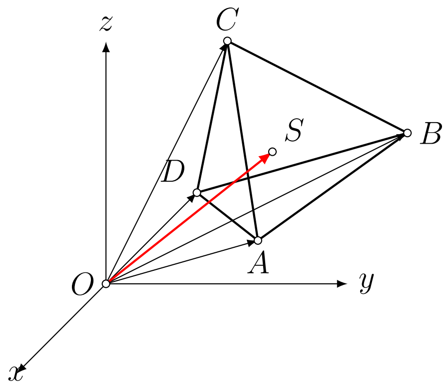
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\vec{r}_M - \vec{r}_A\right) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

$$= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_C - \frac{2}{3}\vec{r}_A = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right)$$

Schwerpunkt eines Tetraeders



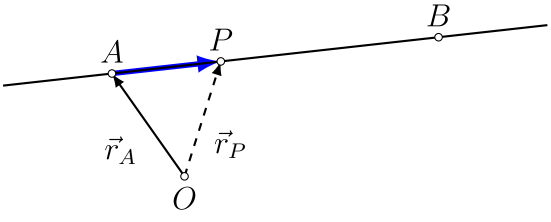
Analog zur Strecke und zum Dreieck erhält man:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right)$$

4.2 Teilung einer Strecke

Innere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *innen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 2$?



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9,4,7)$ und $B(6,-1,2)$ soll innen im Verhältnis $2:3$ geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

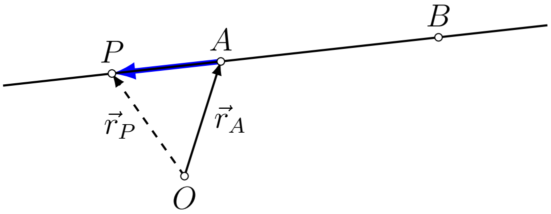
$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-9\\4\\7\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}15\\-5\\-5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-9\\4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$$

innerer Teilungspunkt: $P(-3,2,5)$

Äussere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *aussen* im Verhältnis $|AP|:|PB| = 1:3$?

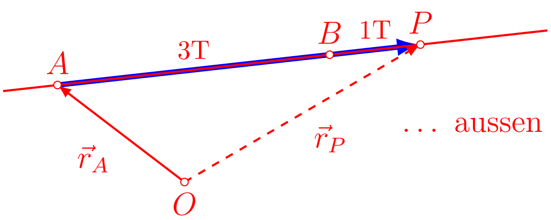


$$\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Beispiel

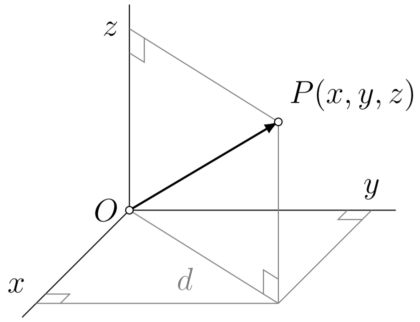
Zeige, dass $P(0,-1,3)$ die Strecke AB mit $A(-8,3,-5)$ und $B(-2,0,1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + k\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = k\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$
$$\begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad P \text{ teilt } AB \ldots$$



… aussen im Verhältnis $4:1$.

4.3 Abstand eines Punktes vom Ursprung

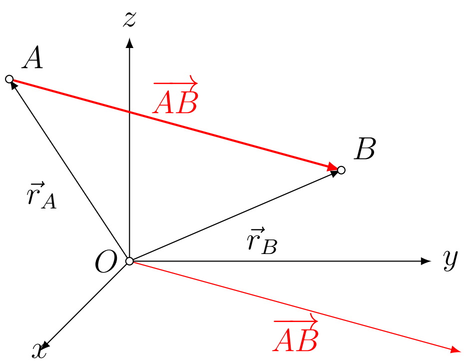


Satz des Pythagoras:

$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

analog für mehr als 3 Komponenten: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

4.4 Länge einer Strecke bzw. eines Vektors



Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

Gesucht: $|\overrightarrow{AB}| = ?$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \left| \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Beispiel

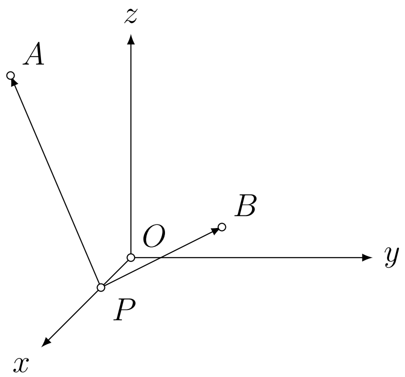
Gegeben sind die Punkte $A(-1,5,2)$ und $B(2,0,3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$

Abstandsaufgabe

Gesucht ist ein Punkt P auf der x-Achse, der von $A(-5,10,8)$ doppelt so weit entfernt ist wie vom Punkt $B(2,-4,6)$



Unbekannter Punkt auf der x-Achse: $P(x,0,0)$

$$|\overrightarrow{AP}| = 2 \cdot |\overrightarrow{BP}|$$

$$\left|\begin{pmatrix}x+5\\-10\\-8\end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}x-2\\4\\-6\end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (-10)^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + 4^2 + (-6)^2}$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + 100 + 64} = 2\sqrt{(x-2)^2 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56} \quad ||^2$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4\big(x^2 - 4x + 56\big)$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4x^2 - 16x + 224$$

$$0 = 3x^2 - 26x + 35$$

$$x_1 = \tfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad P_1(\tfrac{5}{3}, 0, 0)$$

$$x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad P_2(7, 0, 0)$$

Index