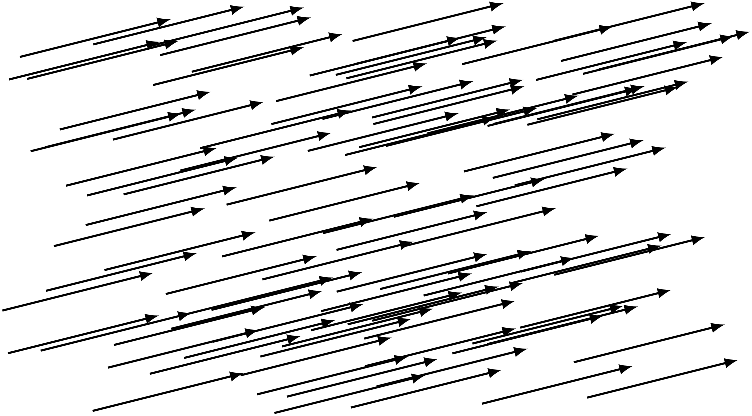
Vektorgeometrie (I)

Theorie

Ein *Vektor* ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung. Vektoren bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben, über die ein Pfeil gesetzt wird ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, ...).

Ein *Vektor* ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung. Vektoren bezeichnen wir mit Kleinbuchstaben, über die ein Pfeil gesetzt wird ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, ...).

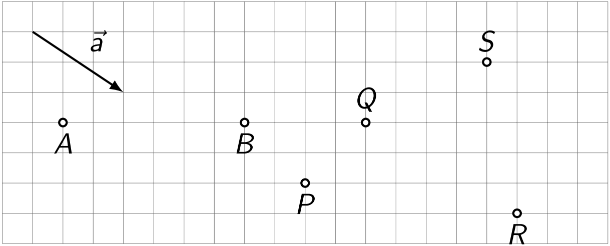
Ein einzelner Pfeil wird *Repräsentant* des Vektors genannt. Repräsentanten werden durch ihren Anfangs- und Endpunkt dargestellt, über die ein Pfeil gezeichnet wird (z. B. $\overrightarrow{AB}$).



Übung 1.1

Zeichne den Repräsentanten ...

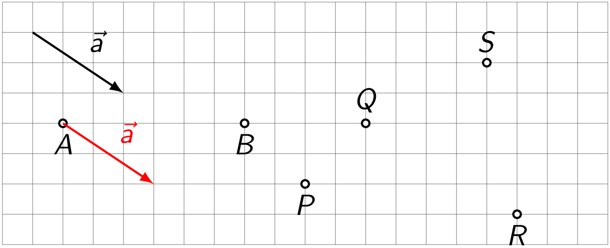
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



Übung 1.1

Zeichne den Repräsentanten ...

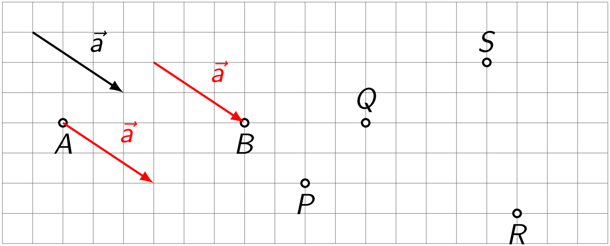
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



Übung 1.1

Zeichne den Repräsentanten ...

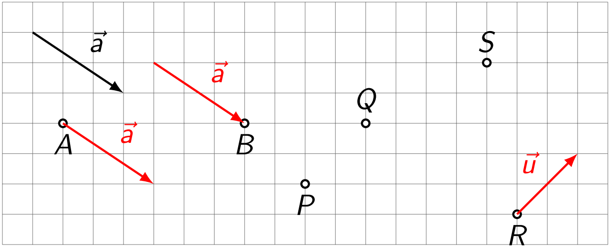
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



Übung 1.1

Zeichne den Repräsentanten . . .

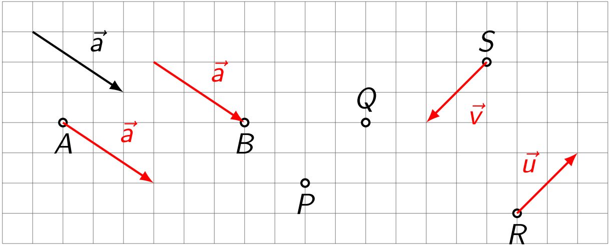
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



Übung 1.1

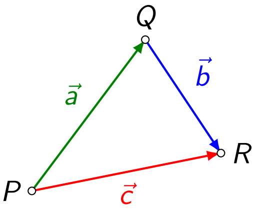
Zeichne den Repräsentanten ...

- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt A beginnt,
- des Vektors $\vec{a}$, der im Punkt B endet,
- des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, der im Punkt R beginnt,
- des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$, der im Punkt S beginnt.



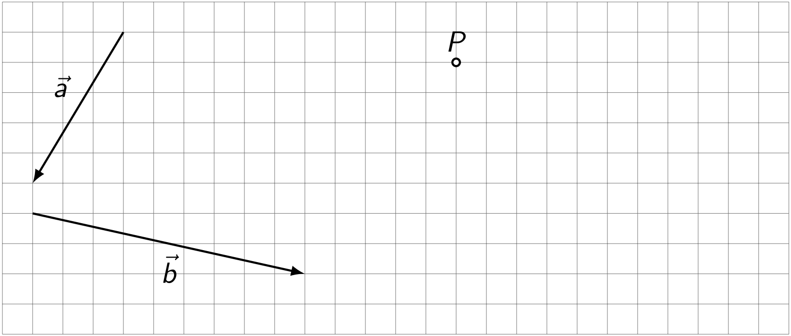
Definition der Summe $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ zweier Vektoren:

- Wähle einen beliebigen Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$.
- Wähle den Repräsentanten $\overrightarrow{QR}$ von $\vec{b}$, der in Q beginnt.
- $\overrightarrow{PR}$ ist ein Repräsentant von $\vec{c}$

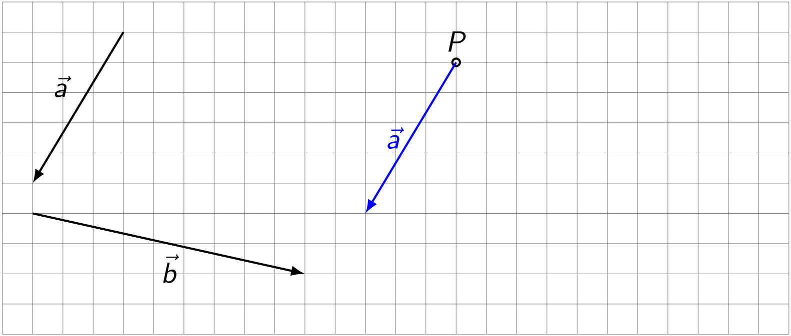


Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl des Repräsentanten $\overrightarrow{PQ}$ von $\vec{a}$. Dadurch ist $\vec{c}$ eindeutig bestimmt.

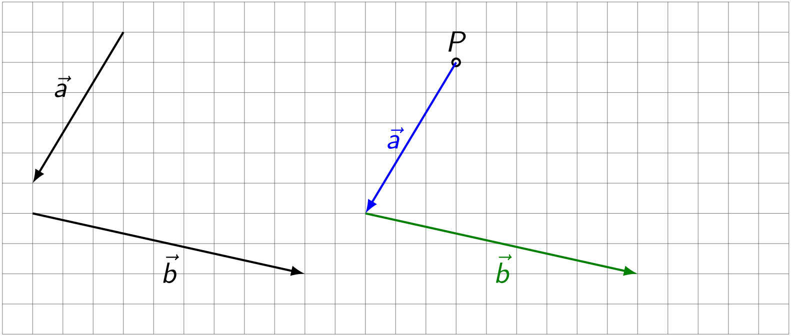
Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



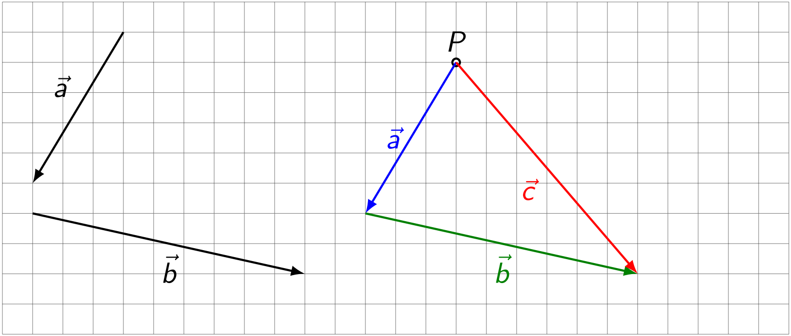
Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



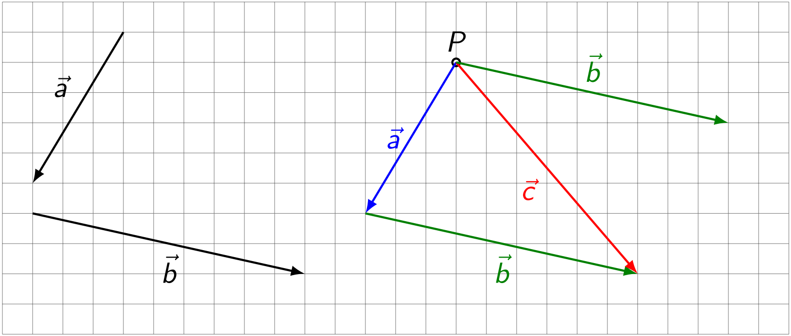
Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



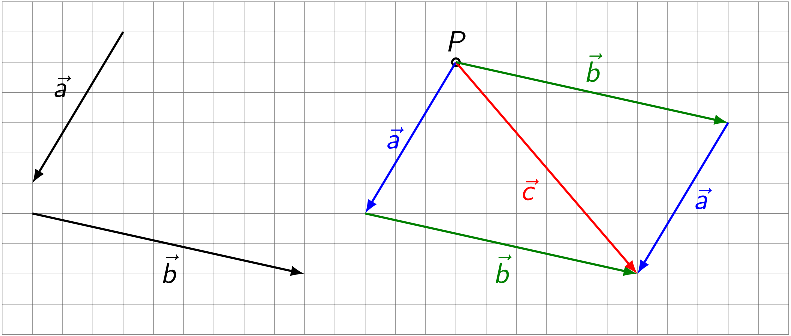
Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



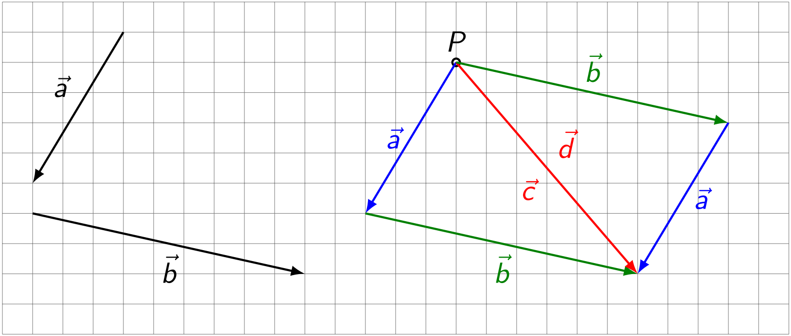
Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



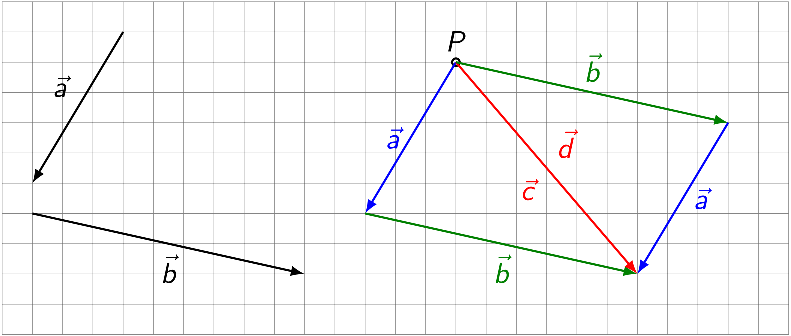
Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?

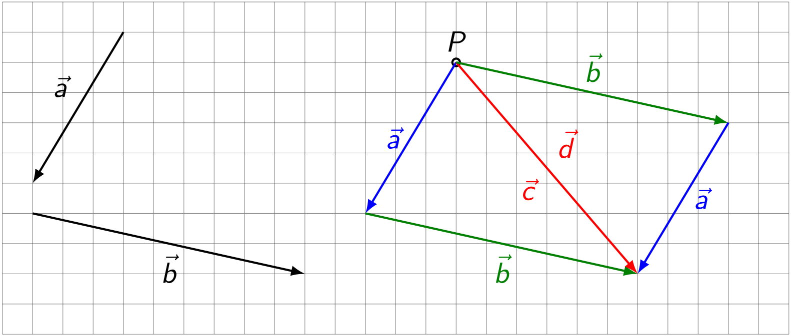


Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?



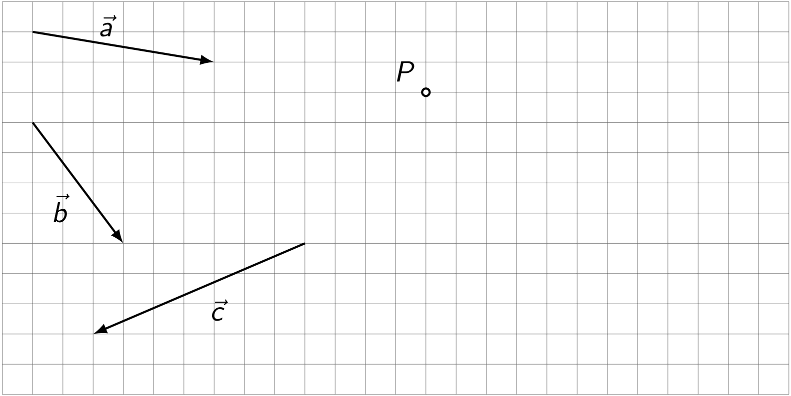
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Zeichne vom Punkt P aus die Repräsentanten von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$. Beobachtung?

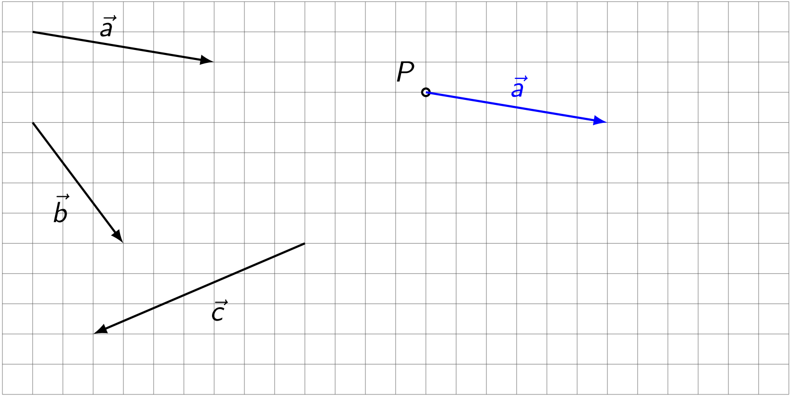


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Das Kommutativgesetz gilt.

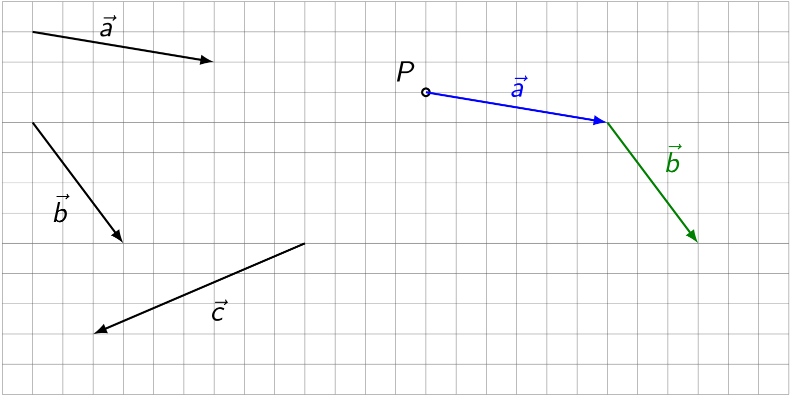
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



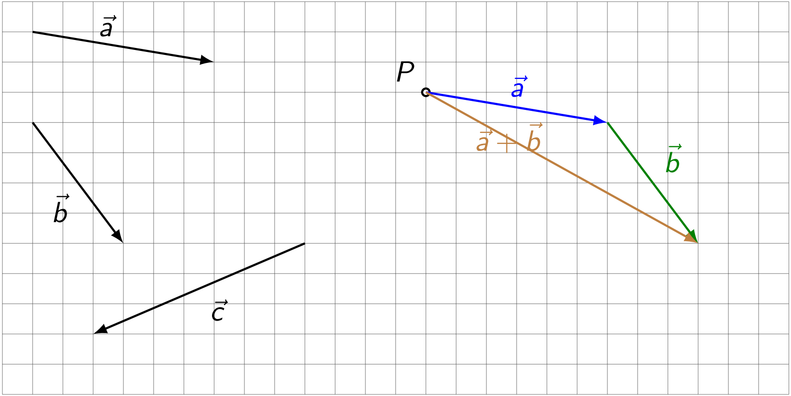
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



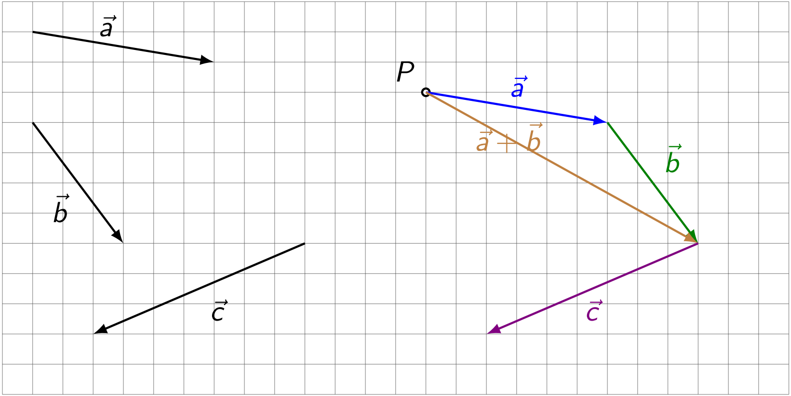
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



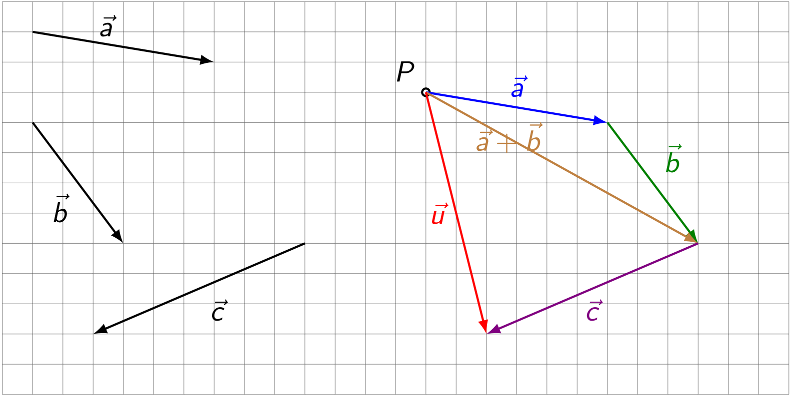
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



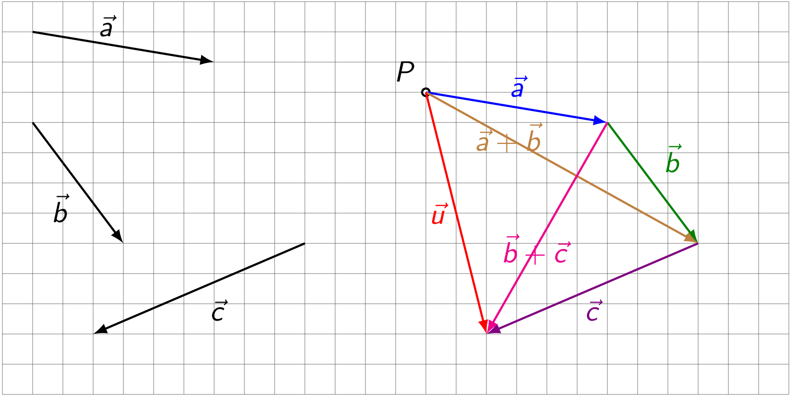
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



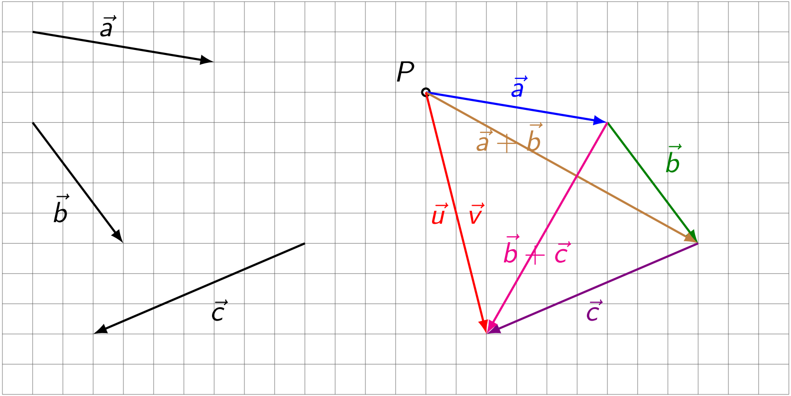
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



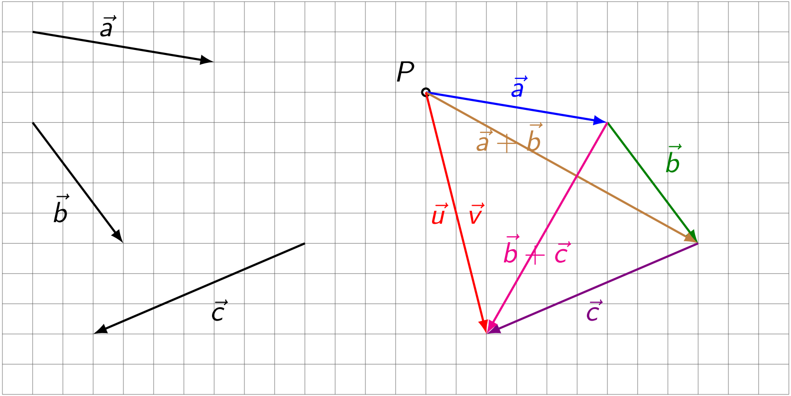
Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?

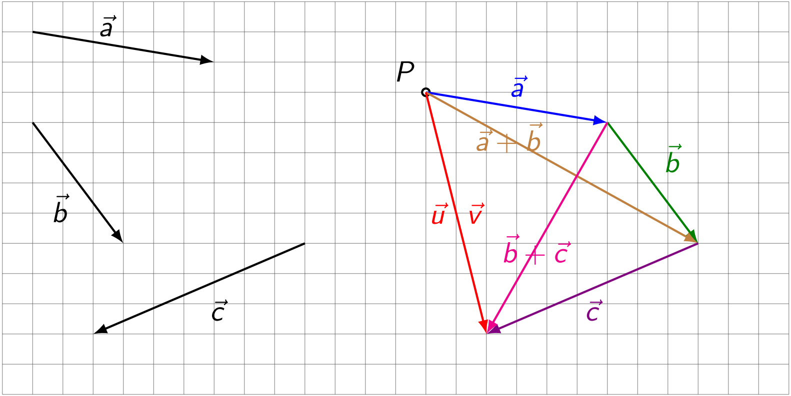


Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?



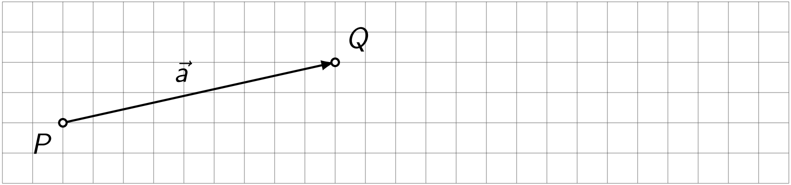
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

Konstruiere vom Punkt P aus die Repräsentanten $\vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ und $\vec{v} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$. Was stellst du fest?

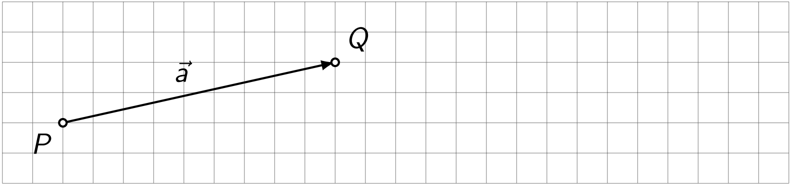


$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ Das Assoziativgesetz gilt.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?

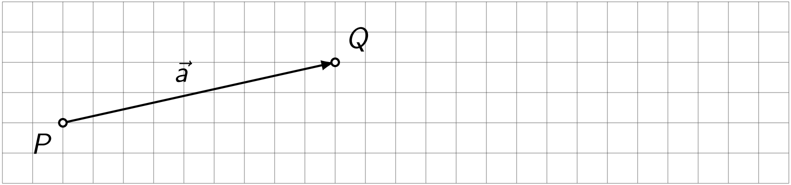


Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?



Anfangs- und Endpunkt von $\vec{x}$ fallen zusammen.

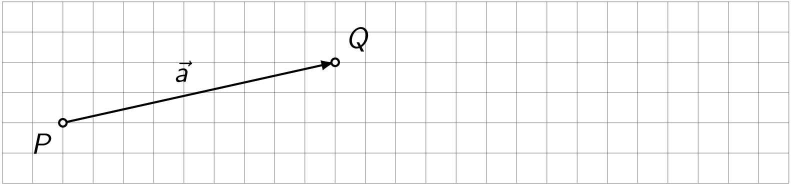
Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?



Anfangs- und Endpunkt von $\vec{x}$ fallen zusammen.

$\vec{x} = \overrightarrow{QQ} = \vec{0}$ heisst *Nullvektor*.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?

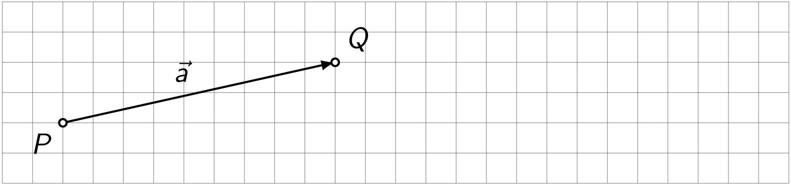


Anfangs- und Endpunkt von $\vec{x}$ fallen zusammen.

$\vec{x} = \overrightarrow{QQ} = \vec{0}$ heisst *Nullvektor*.

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$?



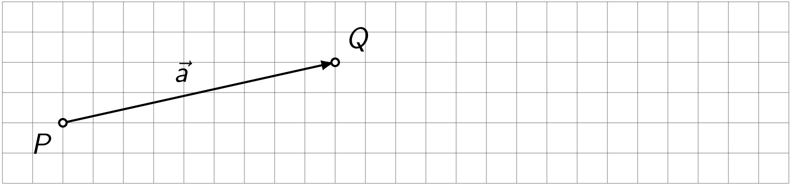
Anfangs- und Endpunkt von $\vec{x}$ fallen zusammen.

$\vec{x} = \overrightarrow{QQ} = \vec{0}$ heisst *Nullvektor*.

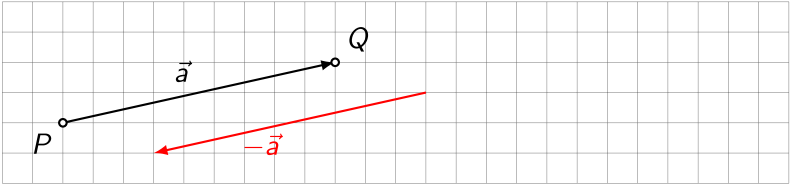
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$

$\vec{0}$ ist das *neutrale Element* der Vektoraddition.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?

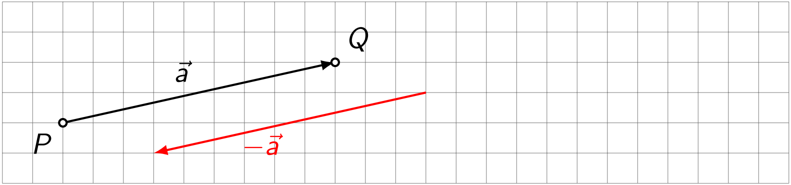


Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?



$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

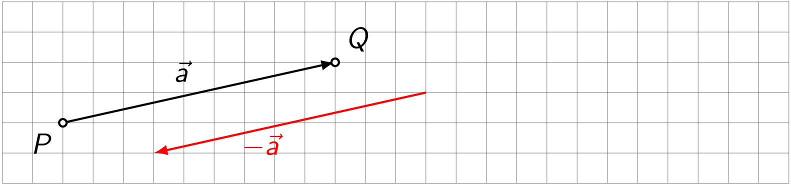
Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?



$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

$\vec{x}$ ist der *Gegenvektor* von $\vec{a}$.

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?

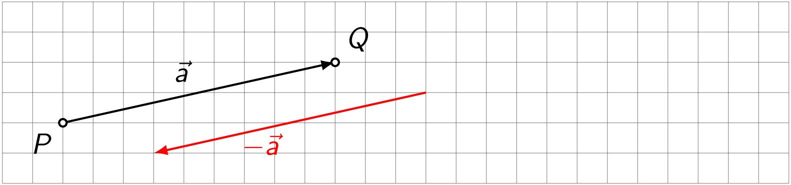


$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

$\vec{x}$ ist der *Gegenvektor* von $\vec{a}$.

$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?



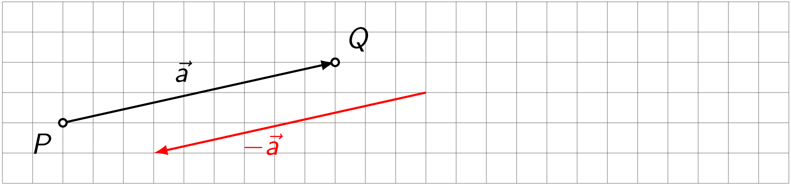
$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

$\vec{x}$ ist der *Gegenvektor* von $\vec{a}$.

$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ für alle Vektoren $\vec{a}$

Welcher Vektor $\vec{x}$ erfüllt die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$?



$\vec{x} = \overrightarrow{QP}$

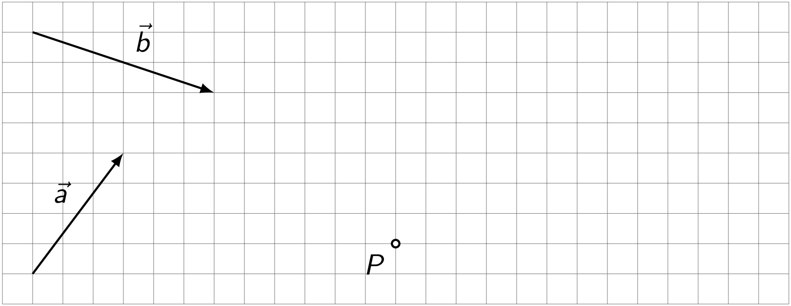
$\vec{x}$ ist der *Gegenvektor* von $\vec{a}$.

$\overrightarrow{QP} = -\vec{a}$

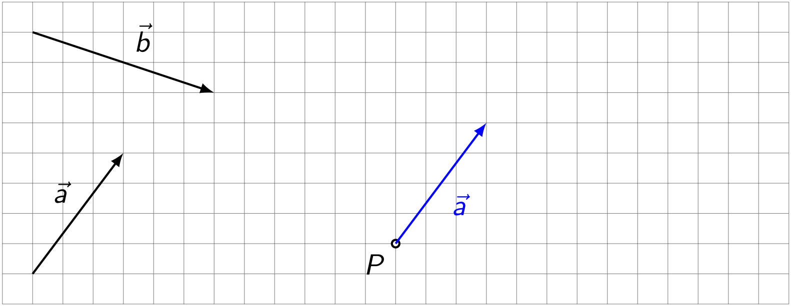
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ für alle Vektoren $\vec{a}$

$-\vec{a}$ ist das *inverse Element* der Vektoraddition.

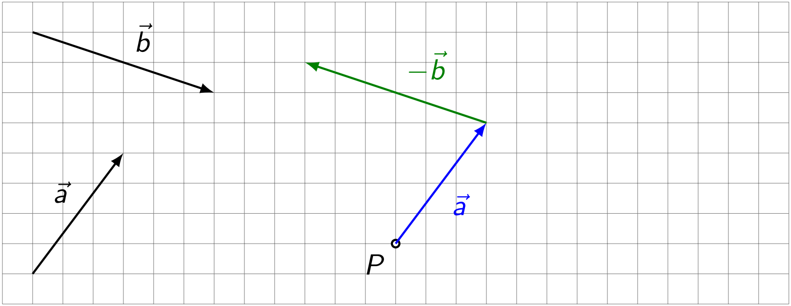
Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



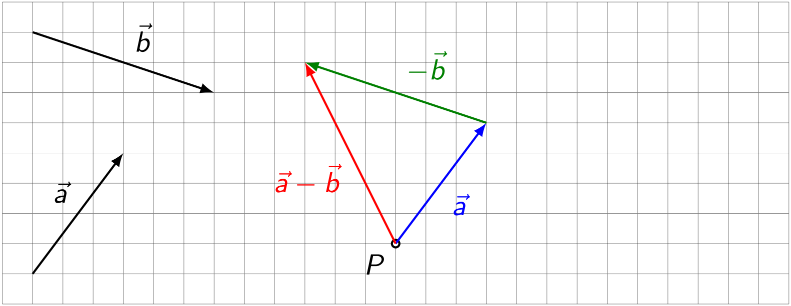
Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



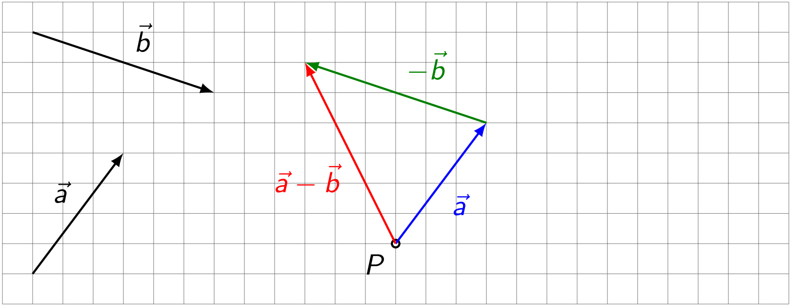
Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

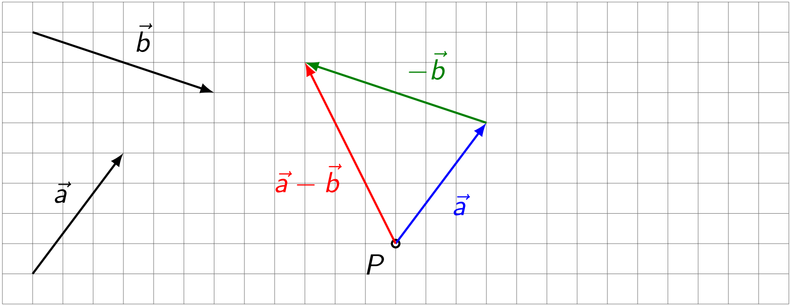


Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

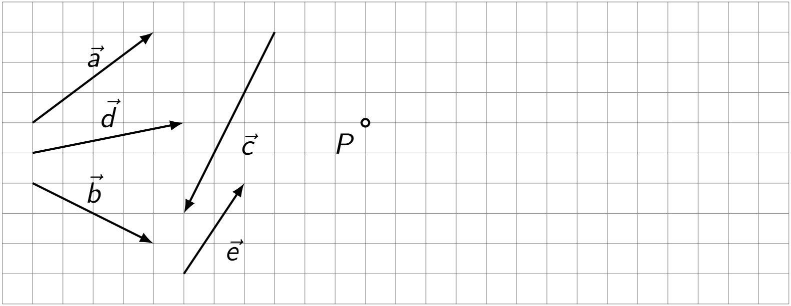
Bestimme vom Punkt P aus einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



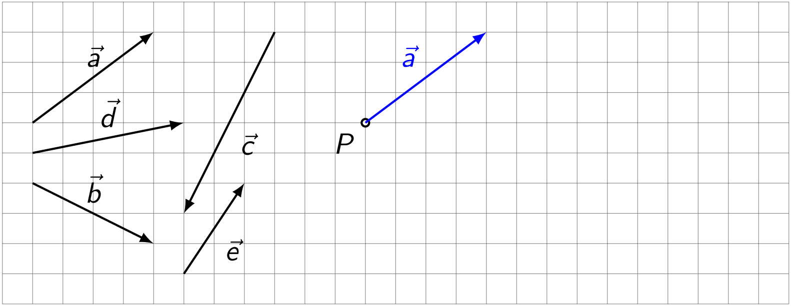
$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

Man subtrahiert einen Vektor, indem man seinen Gegenvektor addiert.

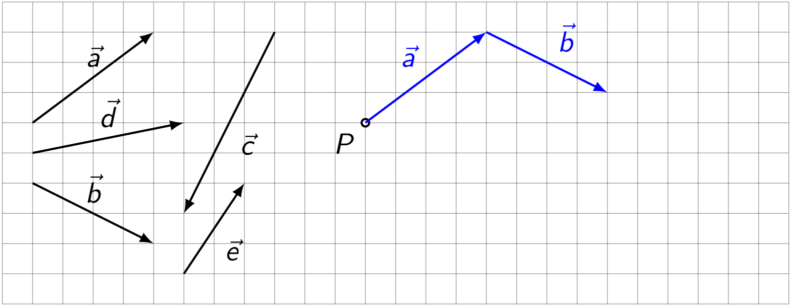
Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



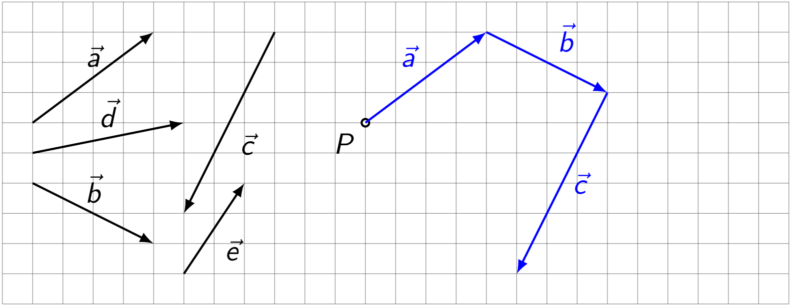
Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



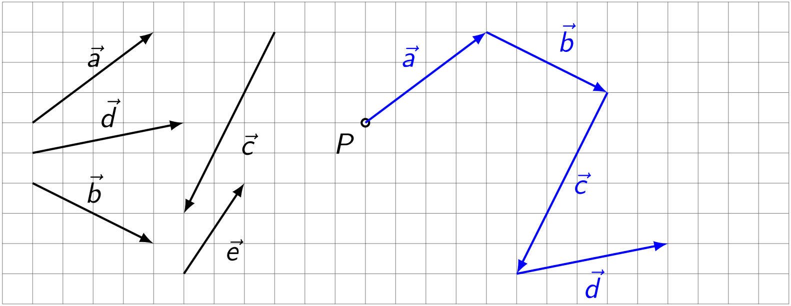
Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



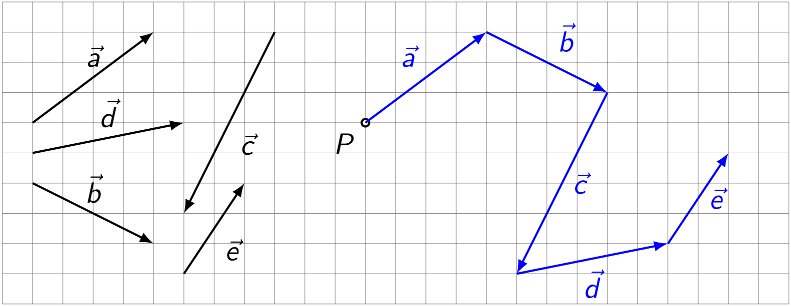
Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



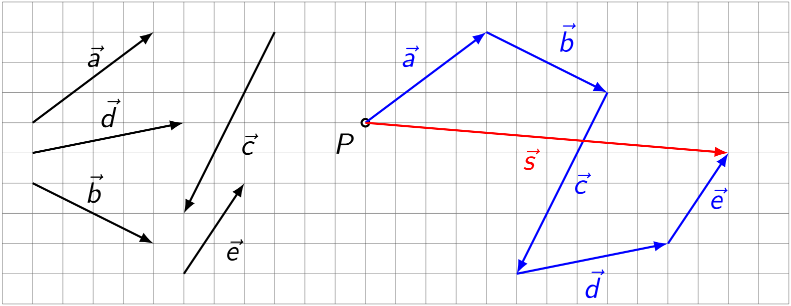
Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



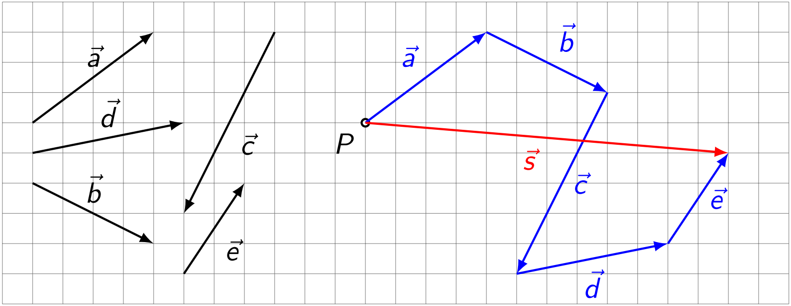
Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.

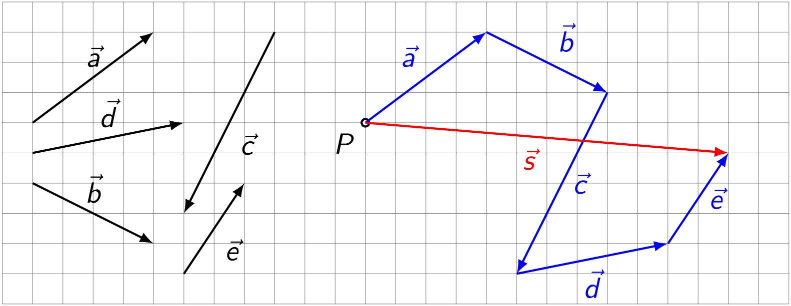


Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.



In der Physik heisst $\vec{s}$ *Resultierende* (z. B. von Kräften).

Zeichne einen Repräsentanten von $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$, der im Punkt P beginnt.

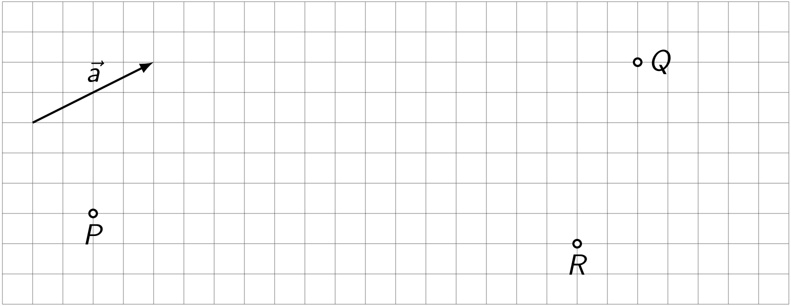


In der Physik heisst $\vec{s}$ *Resultierende* (z. B. von Kräften).

Gilt $\vec{s} = \vec{0}$, dann ist die Vektorkette *geschlossen*.

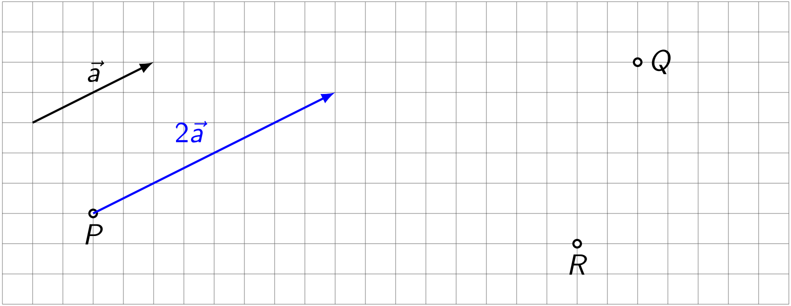
Zeichne Repräsentanten folgender Vektoren:

(a) das 2-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt P
(b) das -3-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt Q
(c) das 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt R



Zeichne Repräsentanten folgender Vektoren:

(a) das 2-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt P
(b) das -3-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt Q
(c) das 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt R

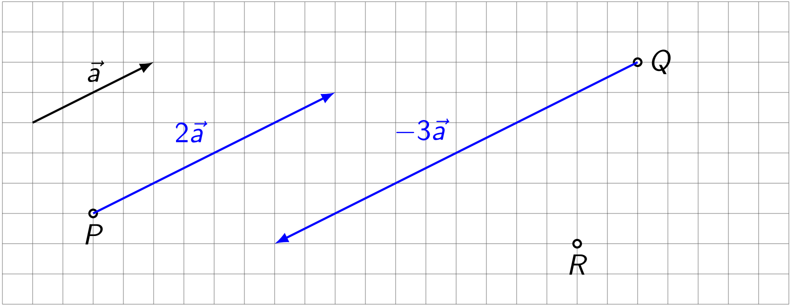


Zeichne Repräsentanten folgender Vektoren:

(a) das 2-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt P

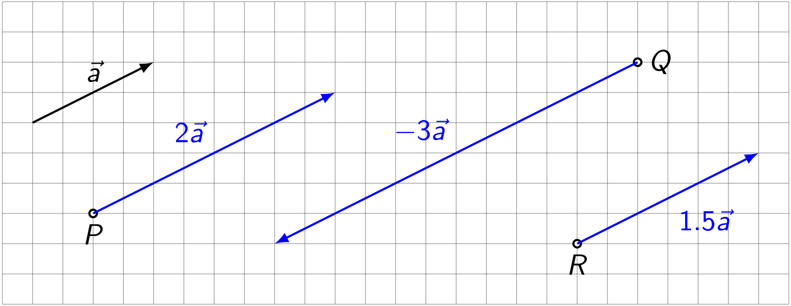
(b) das -3-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt Q

(c) das 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt R



Zeichne Repräsentanten folgender Vektoren:

(a) das 2-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt P
(b) das -3-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt Q
(c) das 1.5-fache des Vektors $\vec{a}$ beginnend im Punkt R



Die *s*-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} =$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} =$

Die *s*-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} =$

Die *s*-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) =$

Die *s*-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} =$

Die *s*-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$

Die s-Multiplikation ist die Multiplikation einer Zahl (=Skalar) mit einem Vektor.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{Skalar} \cdot \text{Vektor} = \text{Vektor}$$

Spezialfälle:

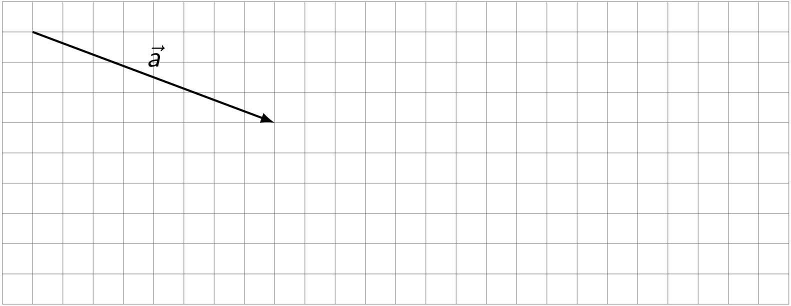
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Eigenschaften:

- $\beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \vec{a}$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

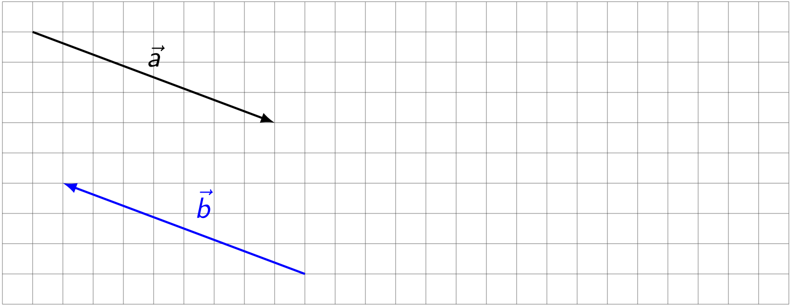
Mit $\left|\vec{a}\right|$ oder $\left\|\vec{a}\right\|$ oder a bezeichnet man die *Länge* (oder *Norm*) des Vektors $\vec{a}$.

Zeichne Repräsentanten von drei verschiedenen Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die alle die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben.



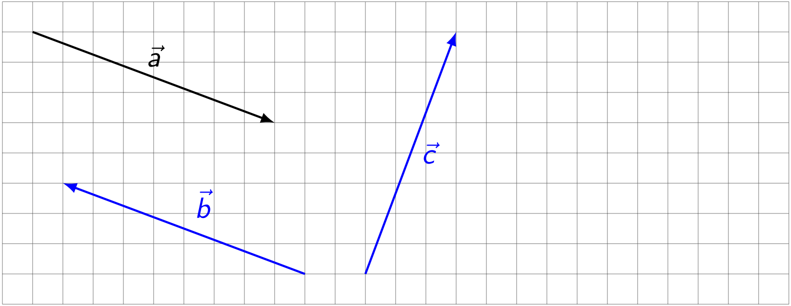
Mit $\left|\vec{a}\right|$ oder $\left\|\vec{a}\right\|$ oder a bezeichnet man die *Länge* (oder *Norm*) des Vektors $\vec{a}$.

Zeichne Repräsentanten von drei verschiedenen Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die alle die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben.



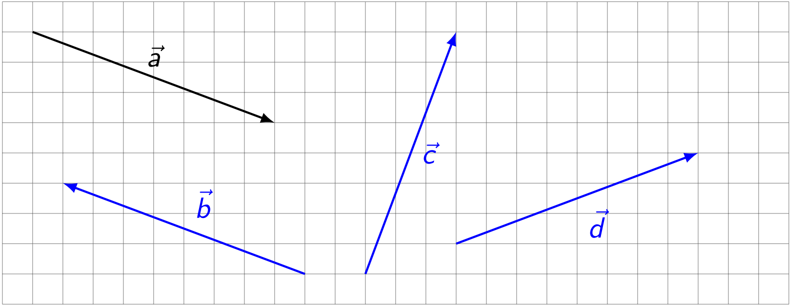
Mit $|\vec{a}|$ oder $\|\vec{a}\|$ oder a bezeichnet man die *Länge* (oder *Norm*) des Vektors $\vec{a}$.

Zeichne Repräsentanten von drei verschiedenen Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die alle die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben.



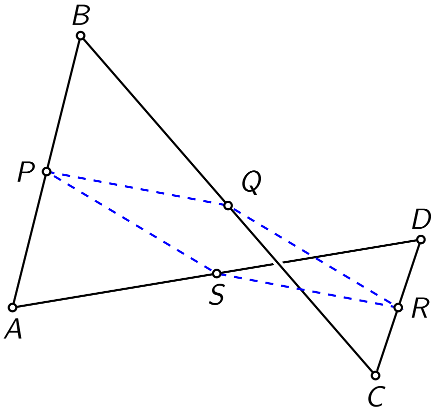
Mit $\left|\vec{a}\right|$ oder $\left\|\vec{a}\right\|$ oder a bezeichnet man die *Länge* (oder *Norm*) des Vektors $\vec{a}$.

Zeichne Repräsentanten von drei verschiedenen Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die alle die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben.



Räumliches Viereck

Zeige, dass die Seitemitten P, Q, R und S des räumlichen Vierecks $ABCD$ ein Parallelogramm bilden.



$$\overrightarrow{PQ} =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) =$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

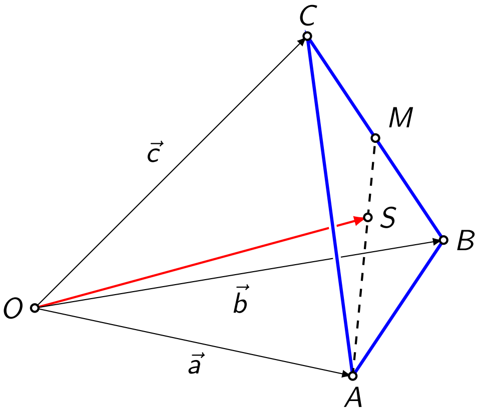
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Wegen $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$ sind die Strecken PQ und SR parallel und gleich lang. (w.z.b.w.)

Schwerpunkt eines Dreiecks

Drücke den Vektor $\overrightarrow{OS}$ von O zum Schwerpunkt S des Dreiecks ABC durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$\overrightarrow{OS} =$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} =$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$=$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) =$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$=$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left[-\vec{b} + \vec{c}\right]\right)$$

$$=$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left[-\vec{b} + \vec{c}\right]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left[-\vec{b} + \vec{c}\right]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) =$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left[-\vec{b} + \vec{c}\right]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$=$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left[-\vec{b} + \vec{c}\right]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} =$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left[-\vec{b} + \vec{c}\right]\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

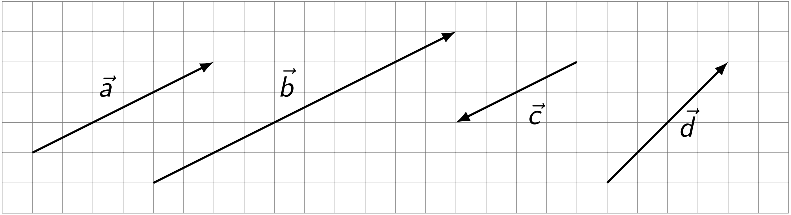
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer gemeinsamen Geraden sind.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer gemeinsamen Geraden sind.

Sind zwei Vektoren *nicht kollinear*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer gemeinsamen Geraden sind.

Sind zwei Vektoren *nicht kollinear*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.



$\vec{a}$ ist kollinear zu $\vec{b}$, $\vec{a}$ ist kollinear zu $\vec{c}$ und $\vec{b}$ ist kollinear zu $\vec{c}$.

$\vec{d}$ ist zu keinem der übrigen Vektoren kollinear.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ besitzt.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ besitzt.

Der Ausdruck $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ wird *Linearkombination* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt.

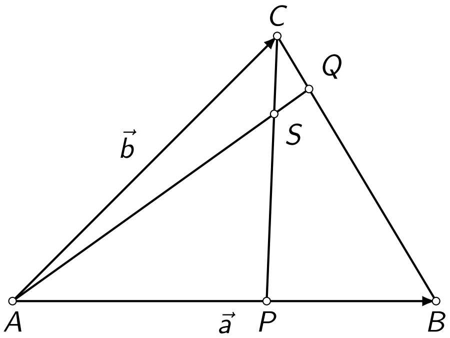
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = 0$ besitzt.

Der Ausdruck $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ wird *Linearkombination* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt.

Anschaulich: Wollen wir mit linear unabhängigen Vektoren einen Weg beschreiben, der uns an den Anfangspunkt zurückführt, so ist dies nur möglich, indem wir gar nicht erst losgehen.

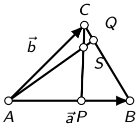


P teilt AB im Verhältnis 3 : 2

Q teilt BC im Verhältnis 4 : 1.

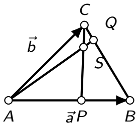
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecken AQ und CP?

Schritt 1



Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

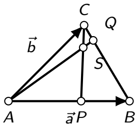
Schritt 1



Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren:

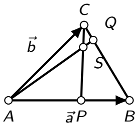
Zum Beispiel: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

Schritt 2



Wahl einer geschlossene Vektorkette, die den Punkt S enthält:

Schritt 2



Wahl einer geschlossene Vektorkette, die den Punkt S enthält:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$\overrightarrow{AP}$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC}$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC})$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b} \right)$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA}$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \beta \cdot (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA})$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \beta \cdot (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA}) = \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \beta \cdot (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA}) = \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \left[-\vec{a} + \vec{b}\right] - \vec{b}\right)$$

Schritt 3

Jeden Vektor der Vektorkette als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= -\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \beta \cdot (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CA}) = \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \beta \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \left[-\vec{a} + \vec{b}\right] - \vec{b}\right) = -\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \right)$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right) + \left(-\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b}\right) = \vec{0}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \right) + \left(-\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} \right) = \vec{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} - \frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \right) + \left(-\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} \right) = \vec{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} - \frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen und ausklammern:

Schritt 4

Die Ausdrücke von oben in die geschlossene Vektorkette einsetzen:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \left(-\frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \right) + \left(-\frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} \right) = \vec{0}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5}\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} - \frac{1}{5}\beta \cdot \vec{a} - \frac{4}{5}\beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ordnen und ausklammern:

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta \right) \cdot \vec{a} + \left(\alpha - \frac{4}{5}\beta \right) \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

$$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

$$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$$

$$\left| \begin{array}{r} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - 4\beta = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{r} (\text{I}) \\ (\text{II}) \end{array}$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

$$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$$

$$\left| \begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 3 \\ 5\alpha - 4\beta &= 0 \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &(\mathrm{I}) \\ &(\mathrm{II}) \end{aligned}$$

$4 \cdot (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$:

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

$$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$$

$$\left| \begin{array}{r} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - 4\beta = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{r} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

$4 \cdot \text{(I)} + \text{(II)}$: $17\alpha = 12$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

$$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$$

$$\left| \begin{array}{r} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - 4\beta = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{r} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

$$4 \cdot \text{(I)} + \text{(II)}:\ 17\alpha = 12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{12}{17}$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{4}{5}\beta = 0$$

$$3 - 3\alpha - \beta = 0 \quad \text{und} \quad 5\alpha - 4\beta = 0$$

$$\left| \begin{array}{r} 3\alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - 4\beta = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array}$$

$$4 \cdot \text{(I)} + \text{(II)}: \; 17\alpha = 12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{12}{17}$$

$$\text{(I)}: \; 3 \cdot \frac{12}{17} + \beta = 3$$

Schritt 5

Die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auswerten:

$$\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\alpha-\frac{1}{5}\beta=0 \quad \text{und} \quad \alpha-\frac{4}{5}\beta=0$$

$$3-3\alpha-\beta=0 \quad \text{und} \quad 5\alpha-4\beta=0$$

$$\left|\begin{array}{r} 3\alpha+\beta=3 \\ 5\alpha-4\beta=0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{array}$$

$$4\cdot(\mathrm{I})+(\mathrm{II}):\ 17\alpha=12 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{12}{17}$$

$$(\mathrm{I}):\ 3\cdot\frac{12}{17}+\beta=3 \quad \Rightarrow \quad 36+17\beta=51 \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{15}{17}$$

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$$

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$$

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$$

- S teilt CP im Verhältnis

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$$

- S teilt CP im Verhältnis $5 : 12$

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$$

- S teilt CP im Verhältnis $5 : 12$
- S teilt AQ im Verhältnis

Schritt 6

Geometrische Deutung des Resultats:

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{12}{17} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \cdot \overrightarrow{QA} = \frac{15}{17} \cdot \overrightarrow{QA}$$

- S teilt CP im Verhältnis $5 : 12$
- S teilt AQ im Verhältnis $15 : 2$

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *komplanar* (*linear abhängig*), wenn deren Repräsentanten parallel zu einer Ebene sind.

Sind drei Vektoren *nicht komplanar*, so werden sie auch *linear unabhängig* genannt.

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ besitzt.

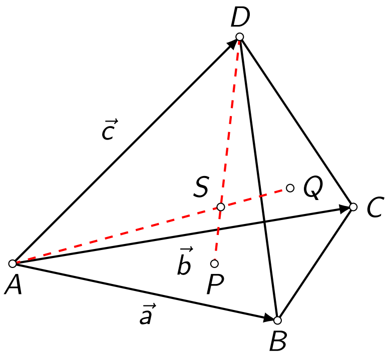
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

als einzige Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ besitzt.

Anschaulich: Wollen wir mit linear unabhängigen Vektoren einen Weg beschreiben, der uns an den Anfangspunkt zurückführt, so ist dies nur möglich, indem wir gar nicht erst losgehen.

Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit den Dreieckschwerpunkten P und Q, sowie den entsprechenden Schwerlinien DP und AQ.



Schneiden sich die Schwerlinien im Schwerpunkt S? Wenn ja, in welchem Verhältnis teilen sie sich?

Schritt 1

Wähle 3 linear unabhängige Vektoren. Zum Beispiel:

- $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$
- $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$

Schritt 2

Wähle eine geschlossene Vektorkette, die S enthält:

Schritt 2

Wähle eine geschlossene Vektorkette, die S enthält:

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} =$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP}$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP} = y\left(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{a}\right] + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{b}\right]\right)$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP} = y\left(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{a}\right] + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{b}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c}$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP} = y\left(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{a}\right] + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{b}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) =$$

Schritt 3

Stelle die Vektoren in (2) durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

$$\overrightarrow{AS} = x \cdot \overrightarrow{AQ} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{SP} = y \cdot \overrightarrow{DP} = y\left(-\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{a}\right] + \frac{1}{3}\left[-\vec{c} + \vec{b}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Schritt 4

Einsetzen und ordnen:

Schritt 4

Einsetzen und ordnen:

$$\frac{1}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b} + \frac{1}{3}x\vec{c} + \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{1}{3}y\vec{b} - y\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \vec{0}$$

Schritt 4

Einsetzen und ordnen:

$$\frac{1}{3}x\vec{a}+\frac{1}{3}x\vec{b}+\frac{1}{3}x\vec{c}+\frac{1}{3}y\vec{a}+\frac{1}{3}y\vec{b}-y\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{3}x-y\right)\vec{c}=\vec{0}$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}x - y = 0$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x - y &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad x + y - 1 = 0$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Schritt 5

Lineare Unabhängigkeit ausnützen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} &= 0 \\ \frac{1}{3}x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} \\ y &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Schritt 6

Geometrische Deutung:

Kein Widerspruch $\Rightarrow$ die Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt.

Schritt 6

Geometrische Deutung:

Kein Widerspruch ⇒ die Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt.

$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AQ} \quad \Rightarrow \quad S$ teilt AQ im Verhältnis $3:1$

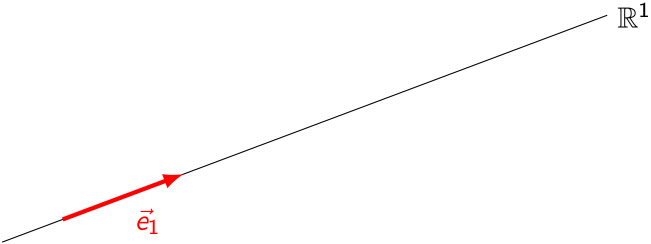
Schritt 6

Geometrische Deutung:

Kein Widerspruch $\Rightarrow$ die Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt.

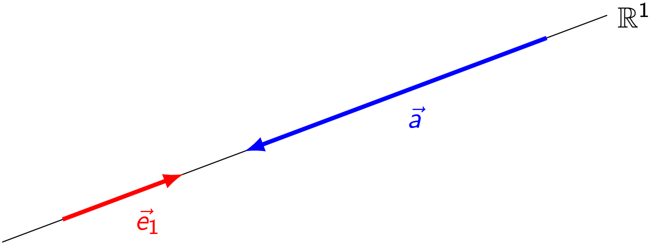
$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AQ} \quad \Rightarrow \quad S \text{ teilt } AQ \text{ im Verhältnis } 3:1$$

$$\overrightarrow{SP} = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{DP} \quad \Rightarrow \quad S \text{ teilt } DP \text{ im Verhältnis } 3:1$$



Gegeben: ein Basisvektor $\vec{e}_1$ (frei wählbar, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$)

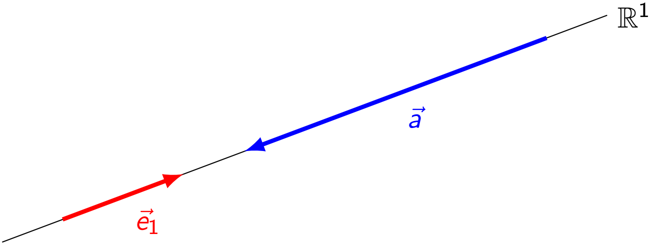
Jeder andere Vektor in $\mathbb{R}^1$ ist *kollinear* zu $\vec{e}_1$.



Gegeben: ein Basisvektor $\vec{e}_1$ (frei wählbar, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$)

Jeder andere Vektor in $\mathbb{R}^1$ ist *kollinear* zu $\vec{e}_1$.

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1$$

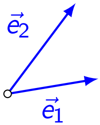


Gegeben: ein Basisvektor $\vec{e}_1$ (frei wählbar, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$)

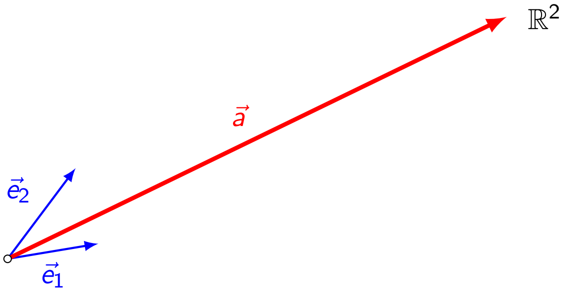
Jeder andere Vektor in $\mathbb{R}^1$ ist *kollinear* zu $\vec{e}_1$.

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad [\text{im Bild: } \vec{a} = -2.5 \cdot \vec{e}_1]$$

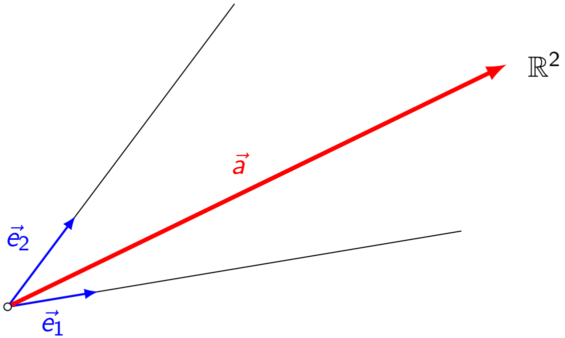
$\mathbb{R}^2$



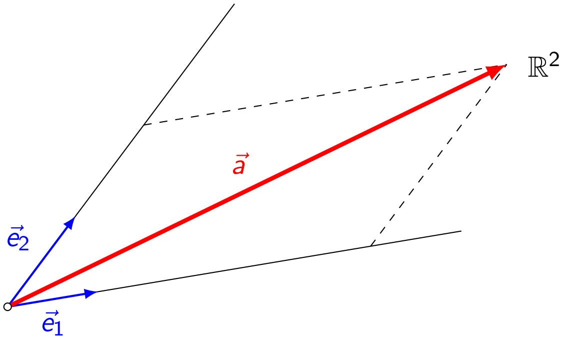
Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)



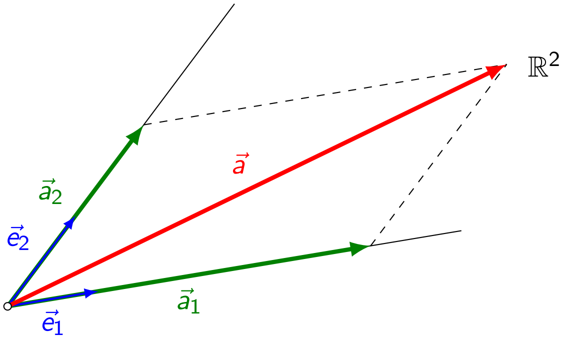
Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)



Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)



Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)



Gegeben: zwei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (frei wählbar, nicht kollinear)

Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1$$

Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1]$$

Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{[im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1\text{]}$$
$$\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2$$

Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1]$$
$$\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{e}_2]$$

Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1]$$
$$\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{e}_2]$$

Die Zahlen a_1 und a_2 sind die *skalaren Komponenten* von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. (Skalar = Zahl)

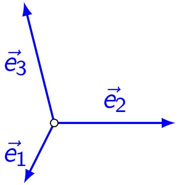
Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ geschrieben werden. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind die *vektoriellen Komponenten* von $\vec{a}$:

$$\vec{a}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_1 = 4 \cdot \vec{e}_1]$$
$$\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad [\text{im Bild: } \vec{a}_2 = 2 \cdot \vec{e}_2]$$

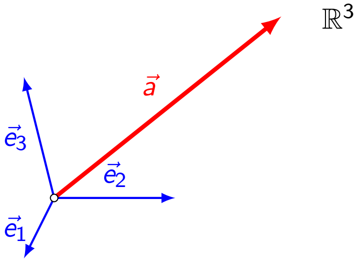
Die Zahlen a_1 und a_2 sind die *skalaren Komponenten* von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. (Skalar = Zahl)

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ Komponentendarstellung von } \vec{a}$$

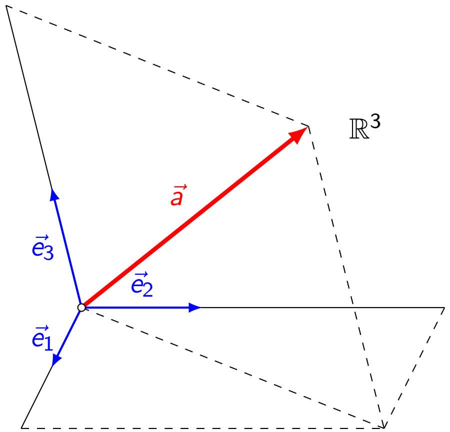
$\mathbb{R}^3$



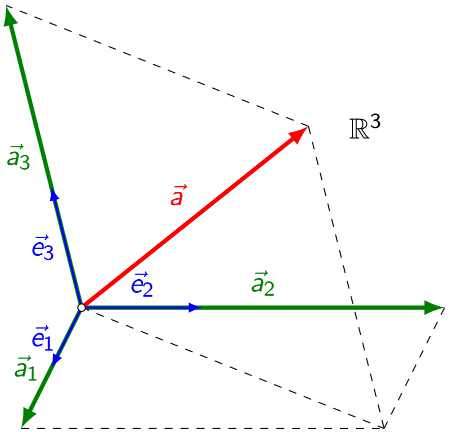
Gegeben: drei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (frei wählbar, nicht komplanar)



Gegeben: drei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (frei wählbar, nicht komplanar)



Gegeben: drei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (frei wählbar, nicht komplanar)



Gegeben: drei Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (frei wählbar, nicht komplanar)

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$\vec{a}$

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$$

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

a_1, a_2, a_3:

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

a_1, a_2, a_3: skalare Komponenten von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

a_1, a_2, a_3: skalare Komponenten von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

Jeder andere Vektor kann als Linearkombination aus $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$: vektorielle Komponenten von $\vec{a}$

a_1, a_2, a_3: skalare Komponenten von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: Komponentendarstellung von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$$

sind durch ihre skalaren Komponenten bezüglich der *gleichen Basis* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ gegeben.

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0}
\end{aligned}$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0}
\end{aligned}
$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$
a_1 - b_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 - b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 - b_3 = 0
$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0}
\end{aligned}$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned}
a_1 - b_1 &= 0 \quad \text{und} \quad & a_2 - b_2 &= 0 \quad \text{und} \quad & a_3 - b_3 &= 0 \\
a_1 &= b_1 \quad \text{und} \quad & a_2 &= b_2 \quad \text{und} \quad & a_3 &= b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0}
\end{aligned}$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned}
a_1 - b_1 = 0 \quad &\text{und} \quad a_2 - b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 - b_3 = 0 \\
a_1 = b_1 \quad &\text{und} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = b_3
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = b_3$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1\,\vec{e}_1 - b_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 - b_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 - b_3\,\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \vec{0}$$

Da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ linear unabhängig sind, folgt:

$$a_1 - b_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 - b_2 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 - b_3 = 0$$
$$a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = b_3$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_2 = b_2 \quad \text{und} \quad a_3 = b_3$$

Moral: Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie in allen skalaren Komponenten übereinstimmen.

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

$$= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_3\vec{e}_3$$

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

$$= a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + b_3\vec{e}_3$$

$$= (a_1 + b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\,\vec{e}_3$$

Vektoraddition

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3+b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3\\ &= a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+b_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3+b_3\vec{e}_3\\ &= (a_1+b_1)\,\vec{e}_1+(a_2+b_2)\,\vec{e}_2+(a_3+b_3)\,\vec{e}_3=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ a_2+b_2\\ a_3+b_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vektorsubtraktion

$$\vec{a} - \vec{b} =$$

Vektorsubtraktion

$$\vec{a} - \vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right)$$

Vektorsubtraktion

$$\vec{a} - \vec{b} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right)$$

$$= a_1\vec{e}_1 - b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 - b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - b_3\vec{e}_3$$

Vektorsubtraktion

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right)\\ &= a_1\vec{e}_1 - b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 - b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - b_3\vec{e}_3\\ &= (a_1-b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2-b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3-b_3)\,\vec{e}_3\end{aligned}$$

Vektorsubtraktion

$$\begin{aligned}
\vec{a} - \vec{b} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right) \\
&= a_1\vec{e}_1 - b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 - b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 - b_3\vec{e}_3 \\
&= (a_1 - b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Skalare Multiplikation

$\alpha \cdot \vec{a}$

Skalare Multiplikation

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \left(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3\right)$$

Skalare Multiplikation

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \left(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3\right)$$

$$= \alpha \cdot a_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha \cdot a_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha \cdot a_3 \cdot \vec{e}_3 =$$

Skalare Multiplikation

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \left(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3\right)$$

$$= \alpha \cdot a_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha \cdot a_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha \cdot a_3 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

$$(-1) \cdot \vec{a}$$

Spezialfälle

$$(-1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

$$(-1)\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

$$0\cdot\vec{a}$$

Spezialfälle

$$(-1)\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

$$0\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren

$\vec{e}_1$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$$

Basisvektoren

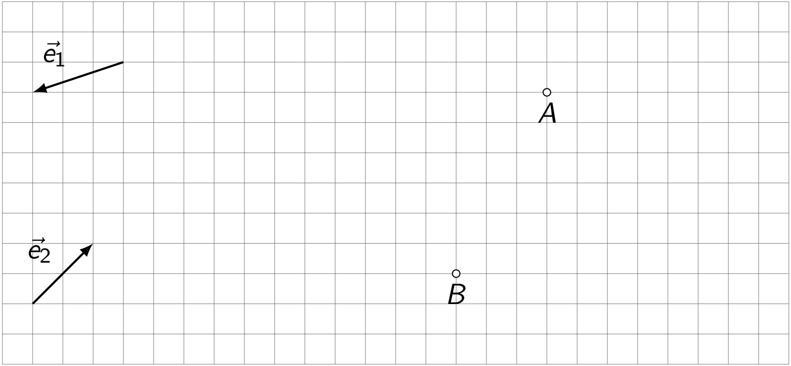
$$\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

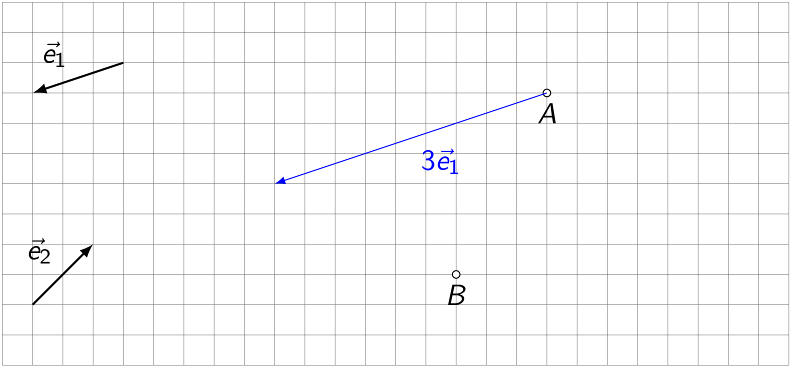
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



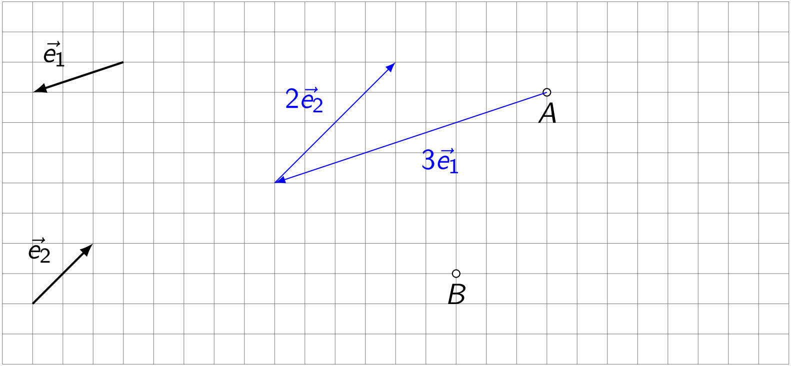
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



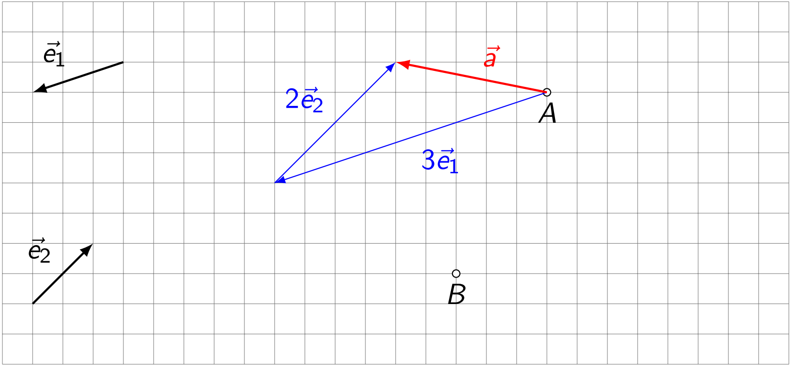
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



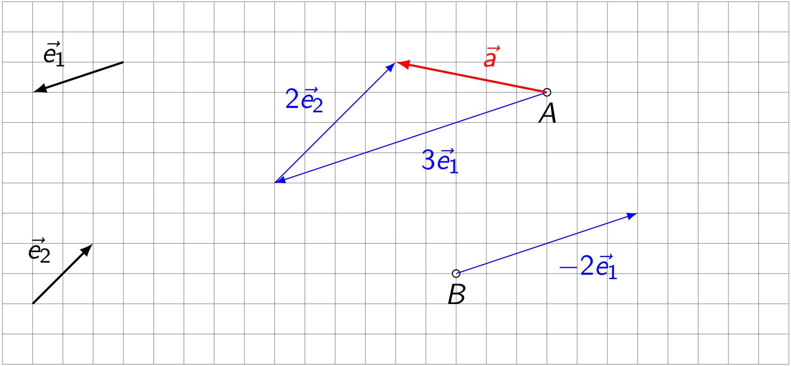
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



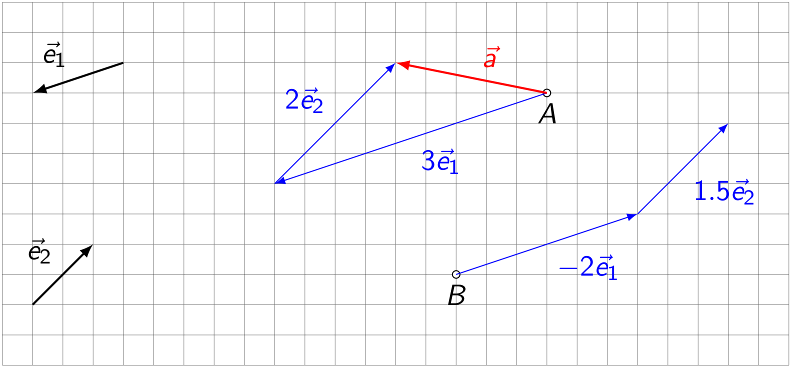
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



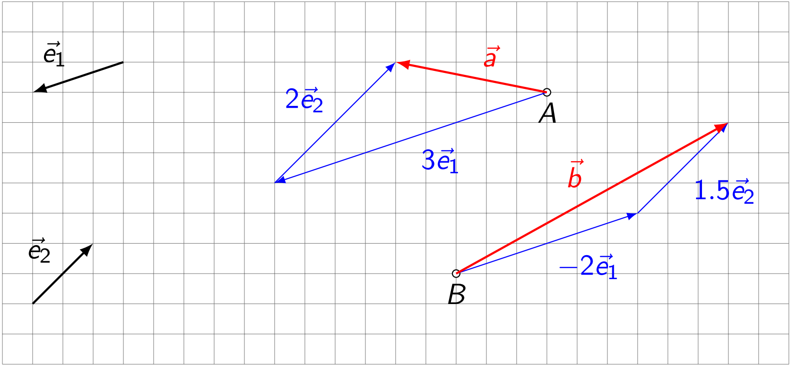
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



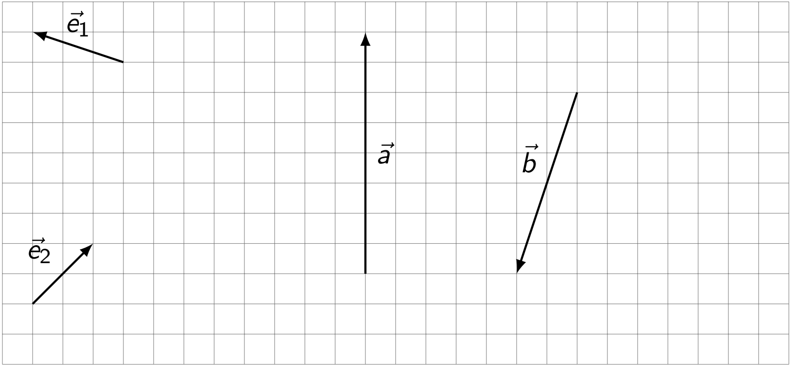
Komponentendarstellung auswerten

Zeichne Repräsentanten von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, die in den Punkten A bzw. B beginnen.



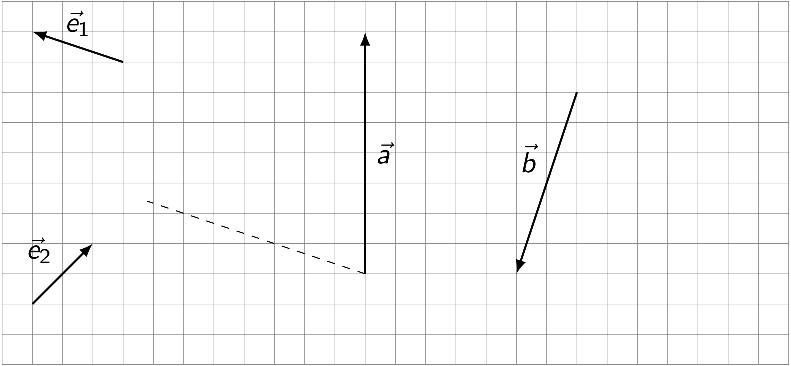
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



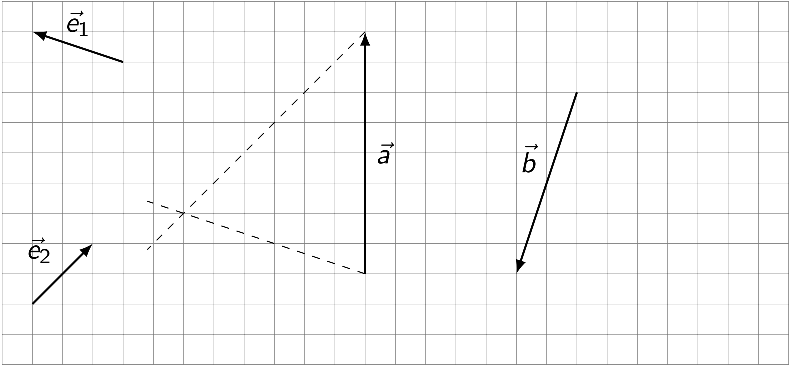
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



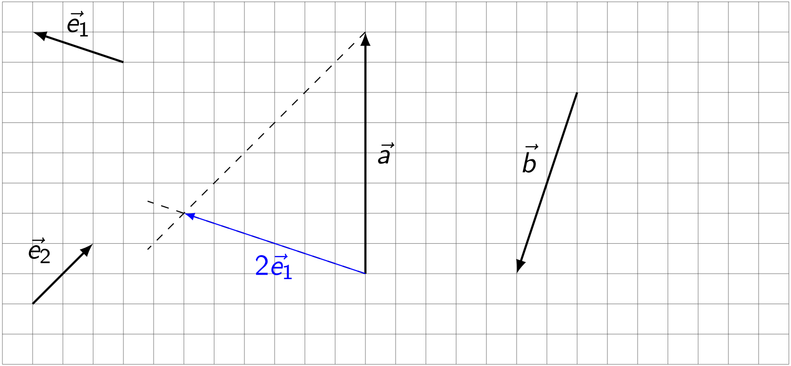
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



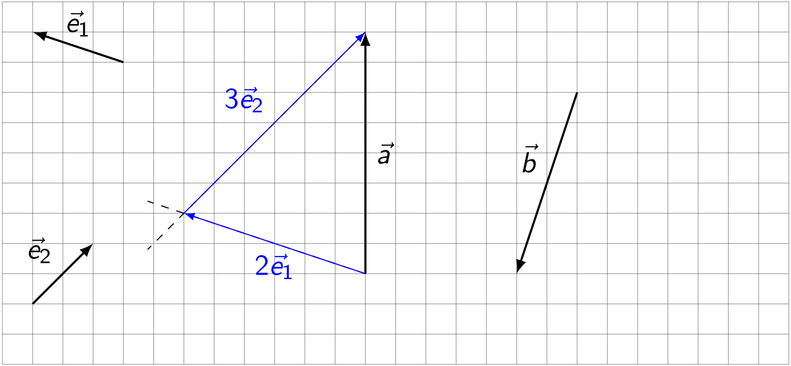
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



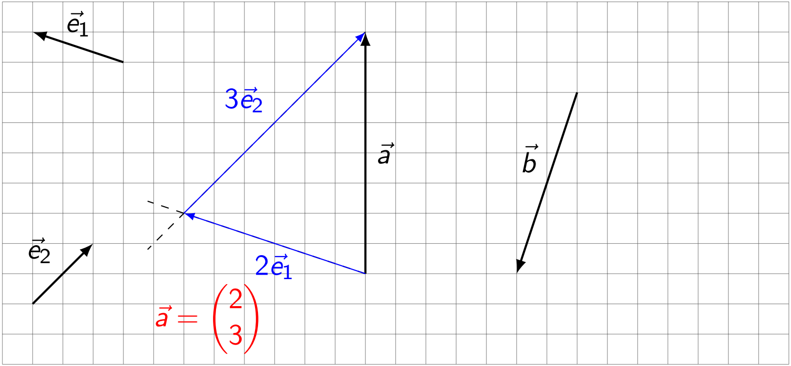
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



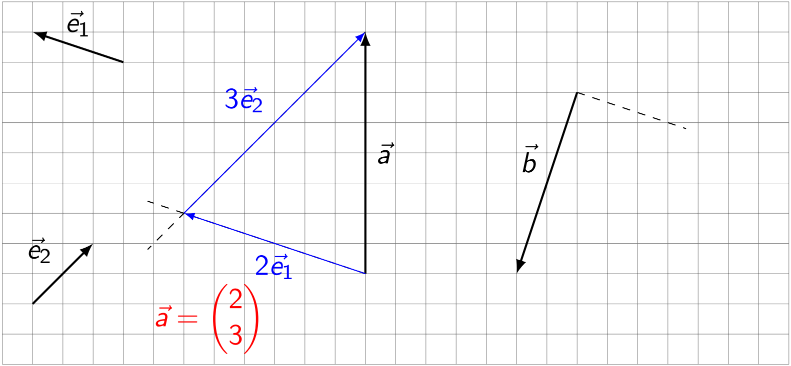
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



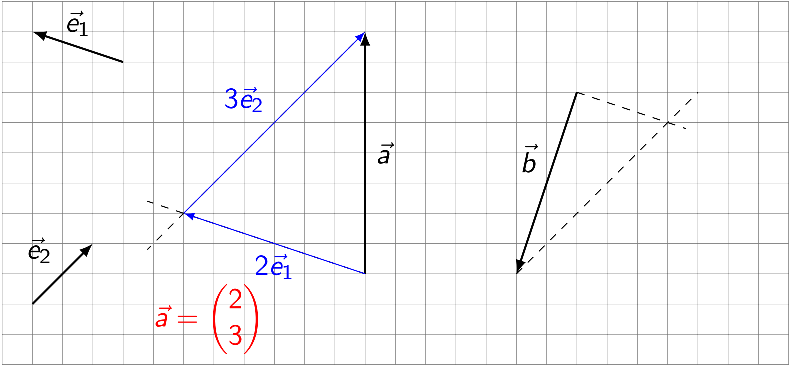
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



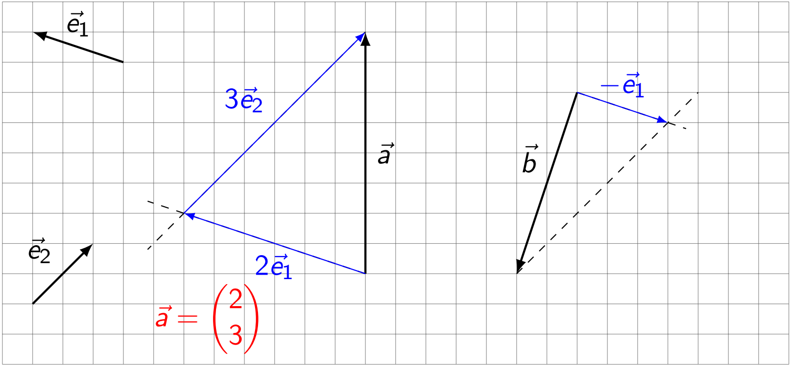
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



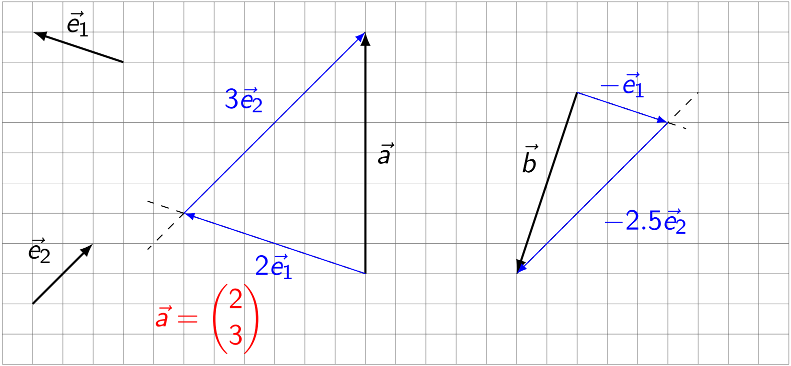
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



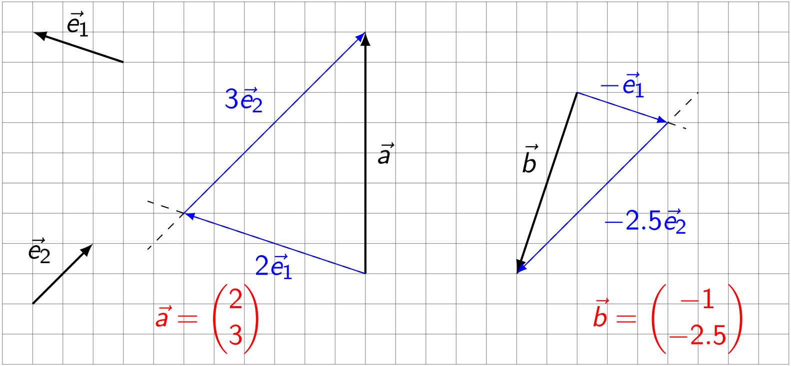
Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



Graphische Zerlegung eines Vektors

Zerlege $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ihre vektoriellen Komponenten in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.



Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\text{rref}}{\Rightarrow}$$

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha - 1.5\beta &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha - 1.5\beta &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen ($\alpha = 1.5\beta$, mit β beliebig)

Kollinearität untersuchen

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ kollinear?

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha - 1.5\beta &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen ($\alpha = 1.5\beta$, mit β beliebig)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{„nur“}}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}$$

Komplanarität untersuchen

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ komplanar?

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar (linear abhängig), wenn $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$ noch weitere Lösungen hat.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{„nur“}}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind *nicht* komplanar (linear *un*abhängig).

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Zerlegung von Vektoren

Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar.

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{rref}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = 3\vec{a} + 14\vec{b} + 5\vec{c}$$

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$\vec{v}$

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$=$

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

Vektorgleichungen

Gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

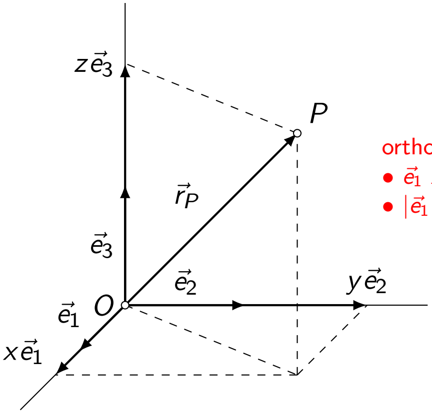
Löse $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} - 7\vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ nach $\vec{v}$ auf.

Gleichung nach $\vec{v}$ auflösen: (das ist hier einfach!)

$\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} + 7\vec{d}$

$$= -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix} = \vec{v}$$



orthonormiert:

- $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ und $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ und $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$
- $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

Drei orthonormierte Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und eine Punkt O (Origo, Ursprung, Nullpunkt) definieren ein rechtwinkliges (kartesisches) Koordinatensystem des Raumes.

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\vec{r}_P$$

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$$

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y, z)$$

Zu jedem Punkt P gibt es einen Ortspfeil $\overrightarrow{OP}$. Dieser ist abhängig von der Wahl des Ursprungs.

$\overrightarrow{OP}$ ist Repräsentant eines Vektors. Dieser heisst *Ortsvektor* von P und wird mit $\vec{r}_P$ bezeichnet.

$\vec{r}_P$ kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

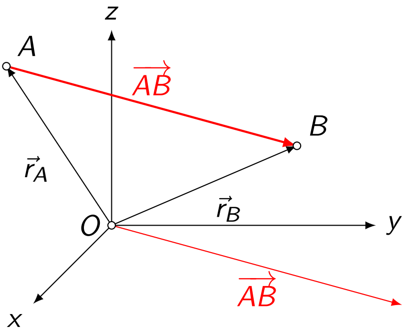
$$\vec{r}_P = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P(x, y, z)$$

Merke: Die Koordinaten des Punktes P sind die die Komponenten des zughörigen Ortsvektors $\vec{r}_P$

Vektor zwischen zwei Punkten

Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

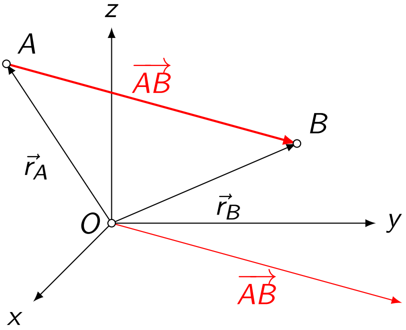
Gesucht: $\overrightarrow{AB} = ?$



Vektor zwischen zwei Punkten

Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

Gesucht: $\overrightarrow{AB} = ?$

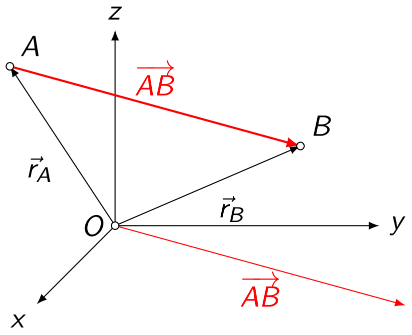


$\overrightarrow{AB}$

Vektor zwischen zwei Punkten

Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

Gesucht: $\overrightarrow{AB} = ?$

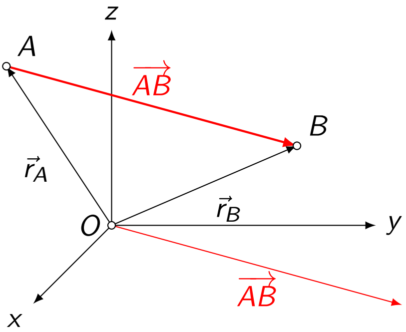


$$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B$$

Vektor zwischen zwei Punkten

Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$

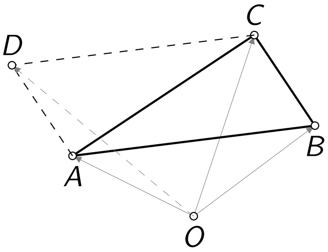
Gesucht: $\overrightarrow{AB} = ?$



$\overrightarrow{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ („Endpunkt minus Anfangspunkt“)

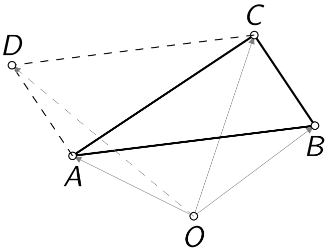
Beispiel

Ergänze das Dreieck mit $A(0, -1, 2)$, $B(5, 1, 1)$ und $C(-2, 3, 0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



Beispiel

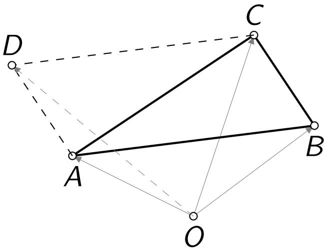
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$\vec{r}_D$

Beispiel

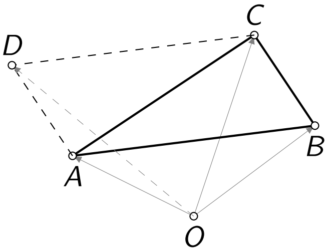
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD}$

Beispiel

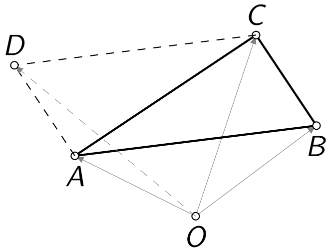
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC}$

Beispiel

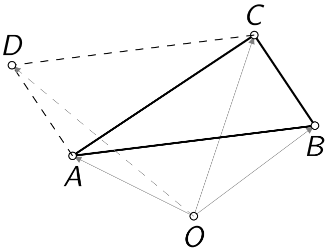
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} +$$

Beispiel

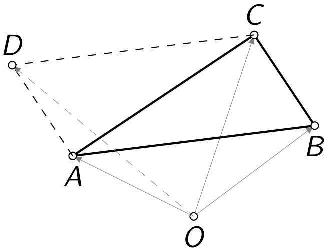
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Beispiel

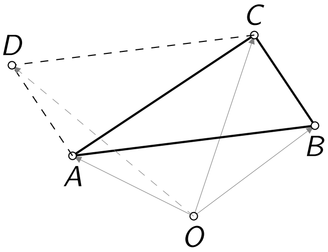
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

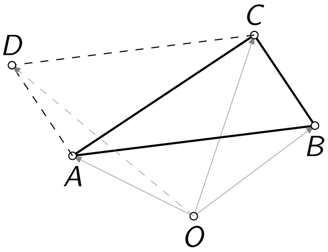
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

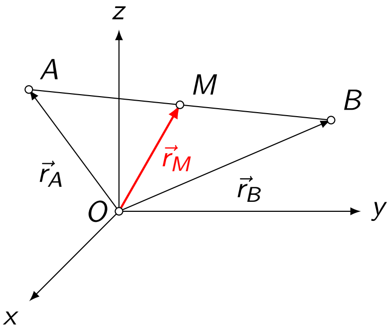
Ergänze das Dreieck mit $A(0,-1,2)$, $B(5,1,1)$ und $C(-2,3,0)$ durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm.



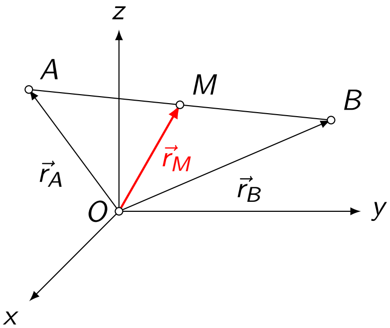
$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad D(-7,1,1)$

Mittelpunkt einer Strecke

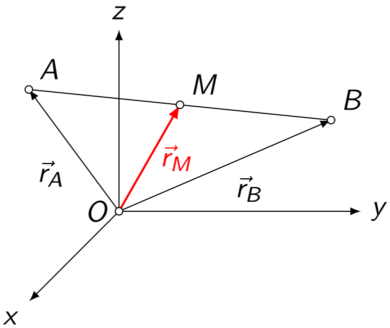


Mittelpunkt einer Strecke



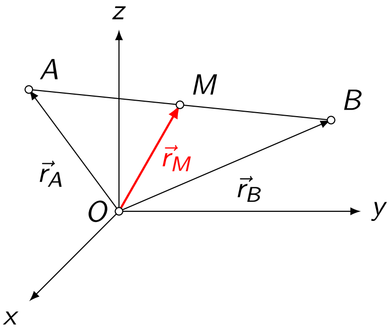
$\vec{r}_M$

Mittelpunkt einer Strecke



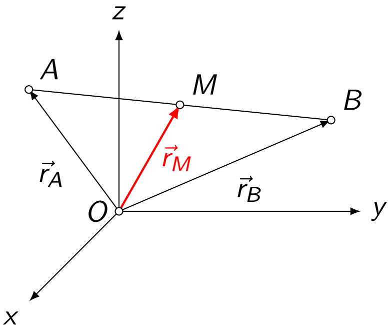
$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Mittelpunkt einer Strecke



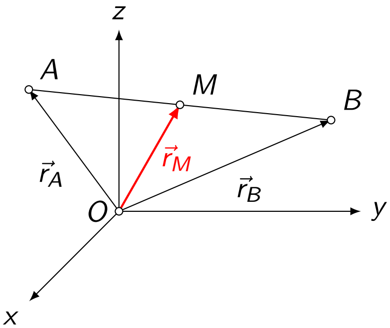
$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(-\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Mittelpunkt einer Strecke



$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(-\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B$$

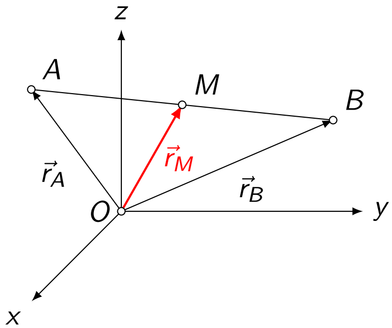
Mittelpunkt einer Strecke



$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(-\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B$$

$$= \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B$$

Mittelpunkt einer Strecke



$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(-\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \vec{r}_A - \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B$$

$$= \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Beispiel

$M(4, -3, 2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1, 5, 7)$.
Bestimme B.

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Beispiel

$M(4, -3, 2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1, 5, 7)$.
Bestimme B.

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

Beispiel

$M(4,-3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1,5,7)$.
Bestimme B.

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

Beispiel

$M(4,-3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1,5,7)$. Bestimme B.

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

Beispiel

$M(4, -3, 2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1, 5, 7)$.
Bestimme B.

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$M(4,-3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1,5,7)$.
Bestimme B.

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Beispiel

$M(4,-3,2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(-1,5,7)$.
Bestimme B.

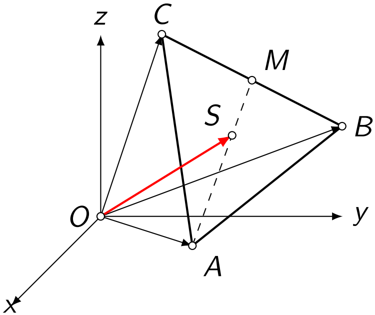
$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

$$2\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_B$$

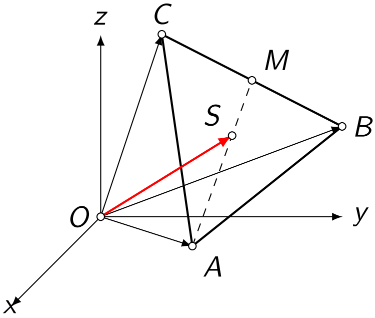
$$\vec{r}_B = 2\vec{r}_M - \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B(9,-11,-3)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks

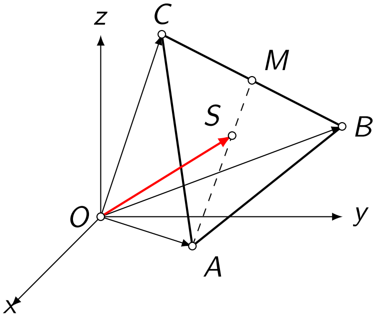


Schwerpunkt eines Dreiecks



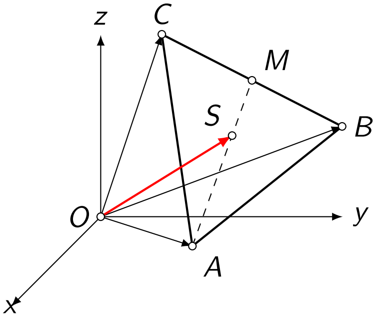
$\vec{r}_S$

Schwerpunkt eines Dreiecks



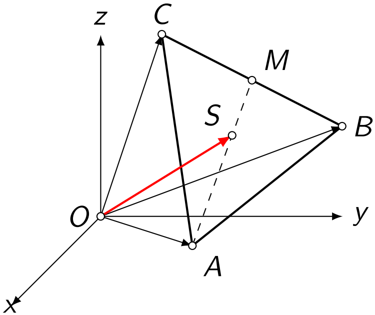
$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

Schwerpunkt eines Dreiecks



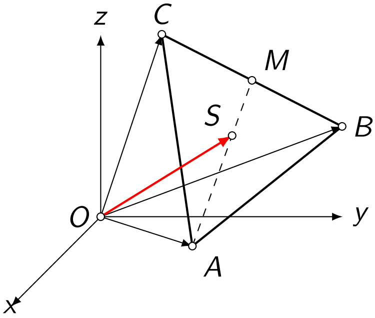
$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks



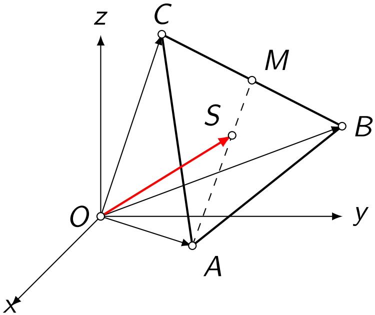
$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}$$

Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

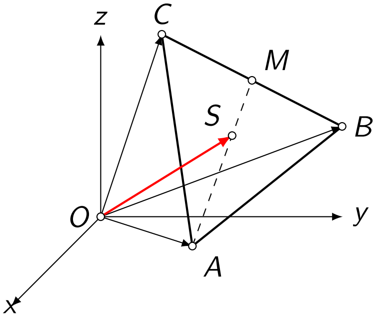
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

$$= \vec{r}_A$$

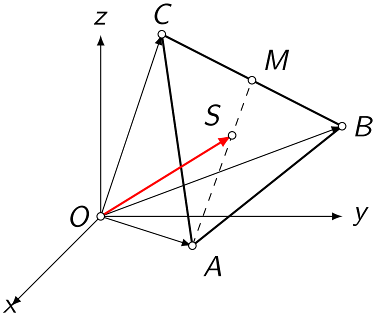
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

$$= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B$$

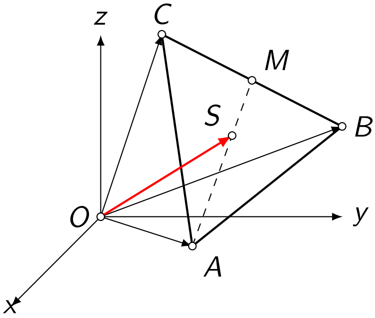
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

$$= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_C$$

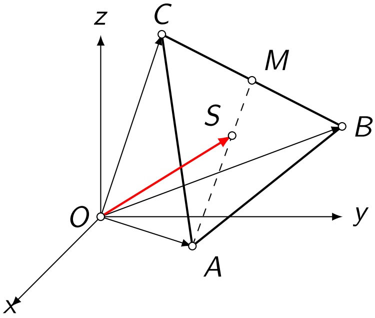
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

$$= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_C - \frac{2}{3}\vec{r}_A$$

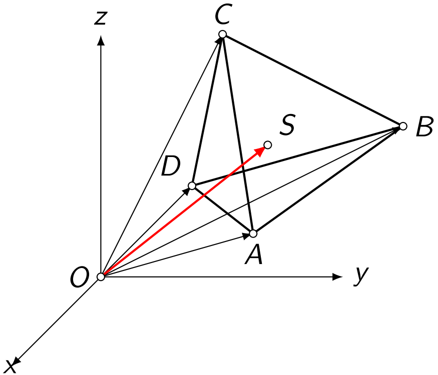
Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_M - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

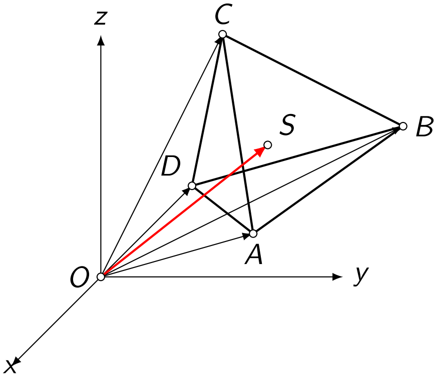
$$= \vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_C - \frac{2}{3}\vec{r}_A = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

Schwerpunkt eines Tetraeders



Analog zur Strecke und zum Dreieck erhält man:

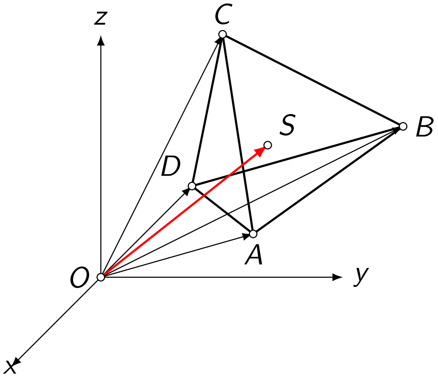
Schwerpunkt eines Tetraeders



Analog zur Strecke und zum Dreieck erhält man:

$\vec{r}_S =$

Schwerpunkt eines Tetraeders

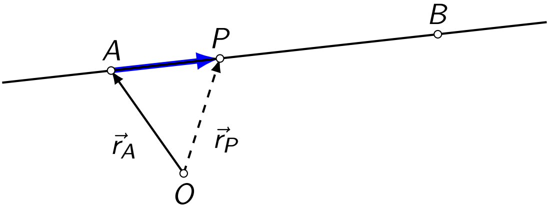


Analog zur Strecke und zum Dreieck erhält man:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{4}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D\right)$$

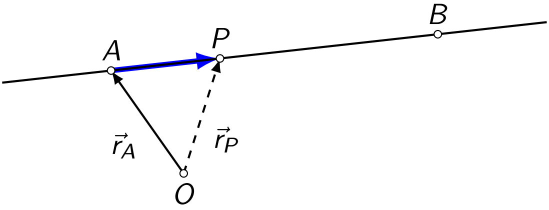
Innere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *innen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 2$?



Innere Teilung

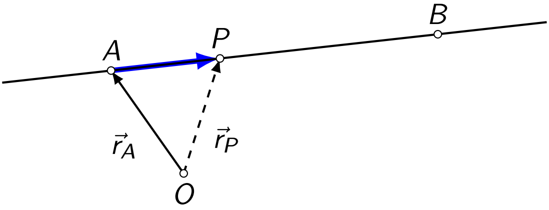
Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *innen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 2$?



$\vec{r}_P$

Innere Teilung

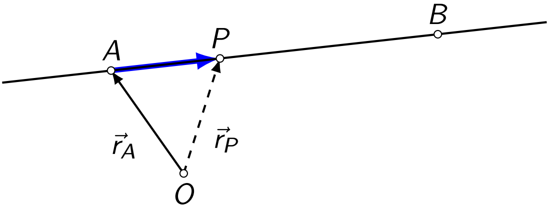
Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *innen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 2$?



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Innere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *innen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 2$?



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{3} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9, 4, 7)$ und $B(6, -1, 2)$ soll innen im Verhältnis $2 : 3$ geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9, 4, 7)$ und $B(6, -1, 2)$ soll innen im Verhältnis $2 : 3$ geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9,4,7)$ und $B(6,-1,2)$ soll innen im Verhältnis $2:3$ geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9,4,7)$ und $B(6,-1,2)$ soll innen im Verhältnis 2 : 3 geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9, 4, 7)$ und $B(6, -1, 2)$ soll innen im Verhältnis 2 : 3 geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Die Strecke AB mit $A(-9, 4, 7)$ und $B(6, -1, 2)$ soll innen im Verhältnis 2 : 3 geteilt werden. Bestimme den Teilungspunkt P.

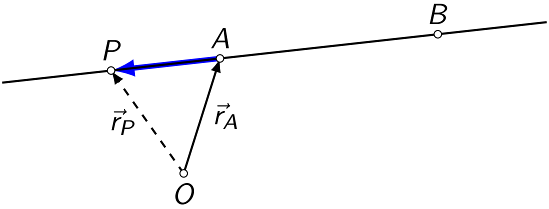
$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

innerer Teilungspunkt: $P(-3, 2, 5)$

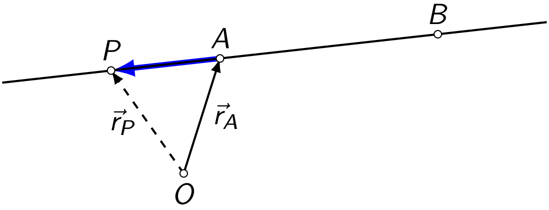
Äussere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *aussen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 3$?



Äussere Teilung

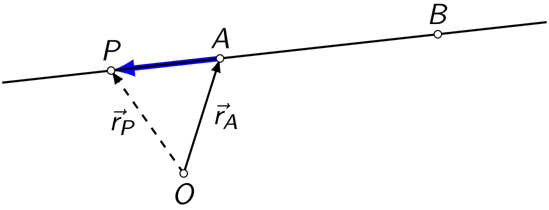
Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *aussen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 3$?



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Äussere Teilung

Welcher Punkt P teilt die Strecke AB *aussen* im Verhältnis $|AP| : |PB| = 1 : 3$?



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{r}_A - \frac{1}{2} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Beispiel

Zeige, dass $P(0,-1,3)$ die Strecke AB mit $A(-8,3,-5)$ und $B(-2,0,1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

Beispiel

Zeige, dass $P(0, -1, 3)$ die Strecke AB mit $A(-8, 3, -5)$ und $B(-2, 0, 1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + k \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel

Zeige, dass $P(0, -1, 3)$ die Strecke AB mit $A(-8, 3, -5)$ und $B(-2, 0, 1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = k \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Beispiel

Zeige, dass $P(0, -1, 3)$ die Strecke AB mit $A(-8, 3, -5)$ und $B(-2, 0, 1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

$$\begin{aligned}\vec{r}_P &= \vec{r}_A + k \cdot \overrightarrow{AB} \\ \vec{r}_P - \vec{r}_A &= k \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \\ \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} &= k \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Beispiel

Zeige, dass $P(0, -1, 3)$ die Strecke AB mit $A(-8, 3, -5)$ und $B(-2, 0, 1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = k \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

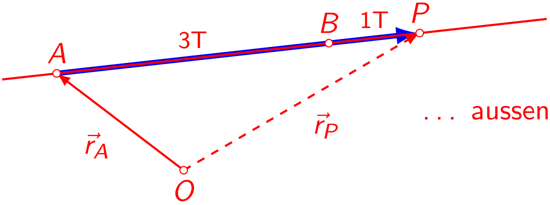
Beispiel

Zeige, dass $P(0,-1,3)$ die Strecke AB mit $A(-8,3,-5)$ und $B(-2,0,1)$ aussen teilt und bestimme das Teilungsverhältnis.

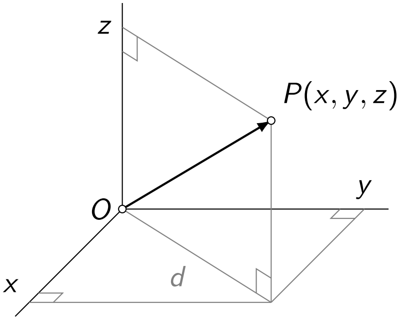
$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + k \cdot \overrightarrow{AB}$$

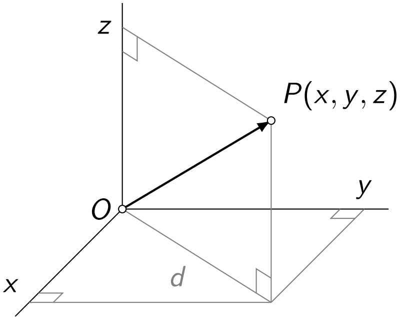
$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = k \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad P \text{ teilt } AB \ldots$$

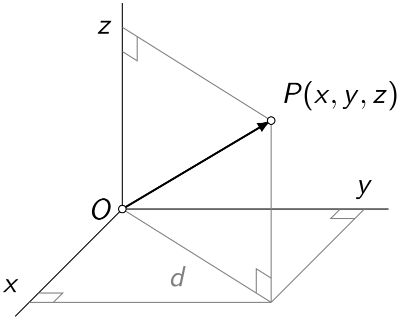


... aussen im Verhältnis 4 : 1.


z
P(x, y, z)
y
O
x
d

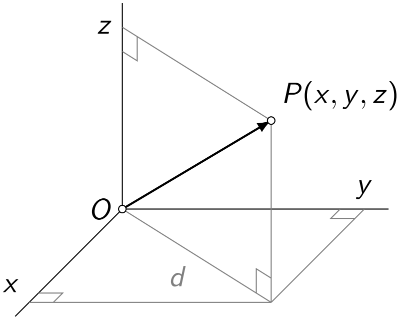


Satz des Pythagoras:



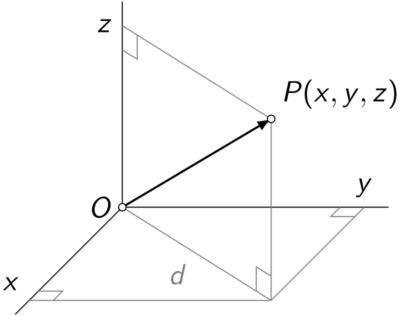
Satz des Pythagoras:

$d^2 =$



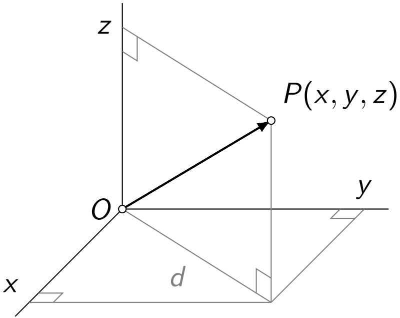
Satz des Pythagoras:

$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow$



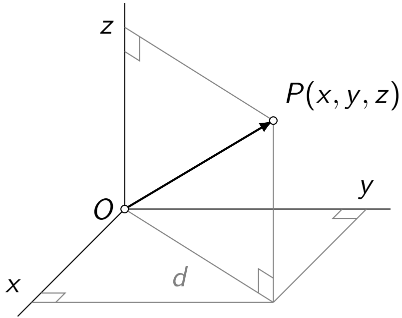
Satz des Pythagoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}| =$$



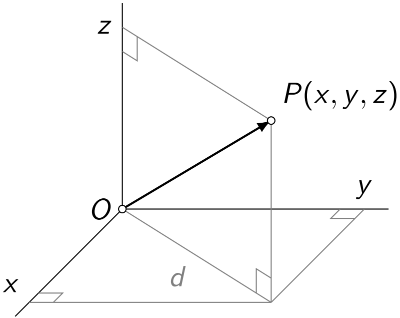
Satz des Pythagoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{d^2 + z^2} =$$



Satz des Pythagoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Satz des Pythagoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

analog für mehr als 3 Komponenten: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}|$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}|$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}|$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_2|$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_2| = \sqrt{0^2 + 1^2}$$

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1}$$

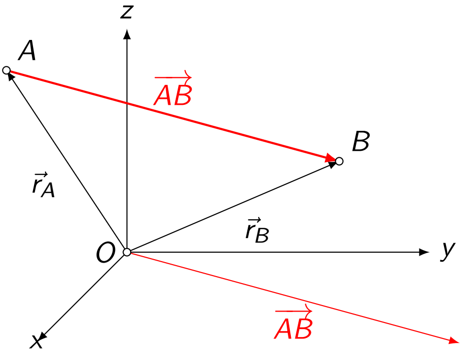
Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$



Gegeben: $A(x_A, y_A, z_A),\ B(x_B, y_B, z_B)$

Gesucht: $|\overrightarrow{AB}| = ?$

$$|\overrightarrow{AB}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \left| \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \right|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \left| \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-\vec{r}_A + \vec{r}_B| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \left| \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(-1,5,2)$ und $B(2,0,3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(-1, 5, 2)$ und $B(2, 0, 3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(-1, 5, 2)$ und $B(2, 0, 3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(-1,5,2)$ und $B(2,0,3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(-1, 5, 2)$ und $B(2, 0, 3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}$$

Beispiel

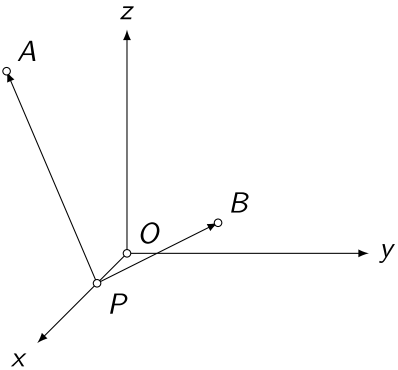
Gegeben sind die Punkte $A(-1,5,2)$ und $B(2,0,3)$. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$

Abstandsaufgabe

Gesucht ist ein Punkt P auf der x-Achse, der von $A(-5, 10, 8)$ doppelt so weit entfernt ist wie vom Punkt $B(2, -4, 6)$



Unbekannter Punkt auf der x-Achse: $P(x, 0, 0)$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|$$

Unbekannter Punkt auf der x-Achse: $P(x, 0, 0)$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} x+5 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right|$$

Unbekannter Punkt auf der x-Achse: $P(x, 0, 0)$

$$|\overrightarrow{AP}| = 2 \cdot |\overrightarrow{BP}|$$

$$\left| \begin{pmatrix} x+5 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right|$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (-10)^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + 4^2 + (-6)^2}$$

Unbekannter Punkt auf der x-Achse: $P(x, 0, 0)$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{BP}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} x+5 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (-10)^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + 4^2 + (-6)^2}$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + 100 + 64} = 2\sqrt{(x-2)^2 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56} \quad ||^2$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56} \quad \|^2$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4\left(x^2 - 4x + 56\right)$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56} \quad \|\,^2$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4\left(x^2 - 4x + 56\right)$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4x^2 - 16x + 224$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56} \quad ||^2$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4\left(x^2 - 4x + 56\right)$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4x^2 - 16x + 224$$

$$0 = 3x^2 - 26x + 35$$

$$\sqrt{x^2+10x+25+100+64} = 2\sqrt{x^2-4x+4+16+36}$$

$$\sqrt{x^2+10x+189} = 2\sqrt{x^2-4x+56} \quad ||^2$$

$$x^2+10x+189 = 4\left(x^2-4x+56\right)$$

$$x^2+10x+189 = 4x^2-16x+224$$

$$0 = 3x^2-26x+35$$

$$x_1 = \tfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad P_1\left(\tfrac{5}{3},0,0\right)$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + 100 + 64} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 16 + 36}$$

$$\sqrt{x^2 + 10x + 189} = 2\sqrt{x^2 - 4x + 56} \quad ||^2$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4\left(x^2 - 4x + 56\right)$$

$$x^2 + 10x + 189 = 4x^2 - 16x + 224$$

$$0 = 3x^2 - 26x + 35$$

$$x_1 = \tfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad P_1\left(\tfrac{5}{3}, 0, 0\right)$$

$$x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad P_2(7, 0, 0)$$