Potenzen und Wurzeln

Theorie

Inhaltsverzeichnis

Version vom 3. Januar 2022

1 Potenzen mit ganzen Exponenten

1.1 Definition

Wir definieren Potenzen a^n mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ *rekursiv*:

Für $a \neq 0$ können wir Potenzen auch für die übrigen ganzzahligen Exponenten definieren, indem wir fortgesetzt durch a dividieren:

1.2 Spezialfälle

1.3 Lerne auswendig

	$e=2$	$e=3$	$e=4$	$e=5$	$e=6$	$e=7$	$e=8$	$e=9$	$e=10$
$b=2$									
$b=3$									
$b=4$									
$b=5$									
$b=6$									
$b=7$									
$b=8$									
$b=9$									
$b=10$									
$b=11$									
$b=12$									
$b=13$									
$b=14$									
$b=15$									
$b=16$									
$b=17$									
$b=18$									
$b=19$									
$b=20$									
$b=21$									
$b=22$									
$b=23$									
$b=24$									
$b=25$									

1.4 Rechenregeln

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \text{(M1)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^p \cdot a^q &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{q \text{ Faktoren}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p+q \text{ Faktoren}} = a^{p+q} \qquad \square \end{aligned}$$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^p \cdot b^p = (ab)^p \quad \text{(M2)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^p \cdot b^p &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} = (a \cdot b)^p \qquad \square \end{aligned}$$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Zwei Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$a^p : a^q = a^{p-q} \quad \text{(D1)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^p : a^q &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{q \text{ Faktoren}} \quad \text{(Klammergesetze)} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ Dividenden}} : \underbrace{a : a : \ldots : a}_{q \text{ Divisoren}} \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p-q \text{ Faktoren}} = a^{p-q} \qquad \square \end{aligned}$$

Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^p : b^p = (a : b)^p \quad \text{(D2)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
a^p : b^p &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} : \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} \quad \text{(Klammergesetze)} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ Dividenden}} : \underbrace{b : b : \ldots : b}_{p \text{ Divisoren}} \quad \text{(Kommutativgesetz)} \\
&= \underbrace{a : b \cdot a : b \cdot \ldots \cdot a : b}_{p \text{ Quotienten}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\
&= \underbrace{(a : b) \cdot (a : b) \cdot \ldots \cdot (a : b)}_{p \text{ Faktoren}} = (a : b)^p \qquad \square
\end{aligned}$$

Potenzieren von Potenzen

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq} \quad \text{(P)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(a^p)^q &= \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}}}_{q \text{ Produkte}} \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\
&= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \cdot q \text{ Faktoren}} = a^{pq} \qquad \square
\end{aligned}$$

Konvention (Vereinbarung)

Ohne Klammern wird eine mehrfache Potenz *von aussen nach innen* ausgewertet.

Beispiel: $a^{p^{q^r}} = a^{\left(p^{(q^r)}\right)}$

2 Höhere Wurzeln

2.1 Definition

Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige Zahl $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft $x^n = a$.

2.2 Rechenregeln

Produkte und Quotienten

Wurzeln von Potenzen

Potenzen von Wurzeln

Wurzeln von Wurzeln

Kürzen von (Wurzel-)Exponenten

2.3 Beispiele

Beispiel 2.1

$\sqrt{\sqrt[3]{625}}$

Beispiel 2.2

$\sqrt[3]{27^4}$

Beispiel 2.3

$\sqrt[5]{12^{10}}$

Beispiel 2.4

$\sqrt[4]{16^3}$

Beispiel 2.5

$\left(\sqrt[7]{15}\right)^{14}$

Beispiel 2.6

$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

Beispiel 2.7

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3}$

Beispiel 2.8

$\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{2a^4} \cdot \sqrt[5]{16a^3}$

Beispiel 2.9

$\sqrt[4]{x^7y^2} \cdot \sqrt[4]{x^{11}y^3} \cdot \sqrt[4]{x^2y^3}$

Beispiel 2.10

$\sqrt[3]{135u^{20}v^{11}} : \sqrt[3]{5u^5v^5}$

Beispiel 2.11

$$\sqrt[4]{\frac{81a^4}{625b^8}}$$

Beispiel 2.12

$$\sqrt[25]{a^{30}} + 2\sqrt[15]{a^{18}} - 3\sqrt[55]{a^{66}}$$

Beispiel 2.13

$$\sqrt[3]{a^{11}}$$

Beispiel 2.14

$$\sqrt[5]{a^{-3}}$$

Beispiel 2.15

$$a^2\sqrt[3]{a^2}$$

Beispiel 2.16

$$(a+b)\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{(a+b)^3}}$$

Beispiel 2.17

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Beispiel 2.18

$$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

3 Potenzen mit rationalen Exponenten

3.1 Definition

Für für $a \in \mathbb{R}_0^+$ definiert man

$$\sqrt[n]{a^p} := a^{\frac{p}{n}}$$

Dies erlaubt es, Wurzeln als Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten darzustellen und damit zu rechnen.

Spezialfälle

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ für $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = a^{-\frac{p}{q}}$ für $a \in \mathbb{R}^+$ und $p,\, q \in \mathbb{N}$

3.2 Rechenregeln

Die neue Schreibweise

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

ist nur dann sinnvoll, wenn die bisherigen Potenzregeln auch für Potenzen mit gebrochenem Exponenten gelten.
Gilt $a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{t}{u}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{t}{u}}$? (M1)

Gilt $a^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{r}{s}} = (a \cdot b)^{\frac{r}{s}}$? (M2)

Analog beweist man für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p,\, q \in \mathbb{Q}$:

(D1) $a^p : a^q = a^{p-q}$

(D2) $a^p : b^p = (a : b)^p$

Gilt $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{t}{u}} = a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{t}{u}}$? (P)

Mit der Einschränkung $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ gelten die Potenzgesetze somit auch für rationale Exponenten $p,\ q \in \mathbb{Q}$:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$
$$a^p : a^q = a^{p-q} \qquad a^p : b^p = (a : b)^p$$
$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}$$

3.3 Beispiele

Beispiel 3.1

$1^{-\frac{3}{4}}$

Beispiel 3.2

$4^{1.5}$

Beispiel 3.3

$64^{\frac{1}{3}}$

Beispiel 3.4

$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

Beispiel 3.5

$36^{-0.25}$

Beispiel 3.6

$0.0016^{-\frac{1}{4}}$

Beispiel 3.7

$\sqrt[6]{7^4}$

Beispiel 3.8

$10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}}$

Beispiel 3.9

$\left(81^{\frac{1}{3}}\right)$

Beispiel 3.10

$0.5^{\frac{1}{7}} \cdot 256^{\frac{1}{7}}$

Beispiel 3.11

$\left(c^8\right)^{\frac{2}{3}} : \left(c^2\right)^{\frac{2}{3}}$

Beispiel 3.12

$\sqrt{8} \cdot 2^{0.5}$

Beispiel 3.13

$9 : 9^{-1.5}$

Beispiel 3.14

$(2^{-2})^{-1.5} =$

Beispiel 3.15

$5^{-0.5} \cdot 20^{-0.5}$

Beispiel 3.16

$\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$

Beispiel 3.17

$128^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}}$

Beispiel 3.18

$a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right)$

Beispiel 3.19

$$\left(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

Beispiel 3.20

$$(2n)^{0.25} \cdot (8n^2)^{0.25} \cdot n^{1.25}$$

Beispiel 3.21

$$\left[ab^2 \cdot (a^3b)^{\frac{1}{5}} - (ab^2)^{\frac{1}{5}} \cdot a^3b\right] : (ab)^{\frac{7}{5}}$$

Beispiel 3.22

$$16^{\frac{1}{4}} + 8^{\frac{4}{3}} + 36^{\frac{3}{2}} - 125^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{4}{3}}$$

Beispiel 3.23

$\left(16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}\right) : 2^{\frac{1}{3}}$

Beispiel 3.24

$\pi^{100} < 9^{50}$ Wahr oder falsch? (mit Begründung)

Beispiel 3.25

$5^{1.5} < 11$ Wahr oder falsch? (mit Begründung)

Beispiel 3.26

Welche Zahl ist grösser? $4^{\frac{1}{4}}$ oder $5^{\frac{1}{5}}$? (mit Begründung)

Beispiel 3.27

Löse in $\mathbb{Q}$: $3^x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Beispiel 3.28

Löse in $\mathbb{Q}$: $25^{100} = 125^x$

Beispiel 3.29

Löse in $\mathbb{Q}$: $x^4 = -16$

Beispiel 3.30

Löse in $\mathbb{Q}$: $x^{-4} = 16$

Beispiel 3.31

Löse in $\mathbb{Q}$: $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$

Beispiel 3.32

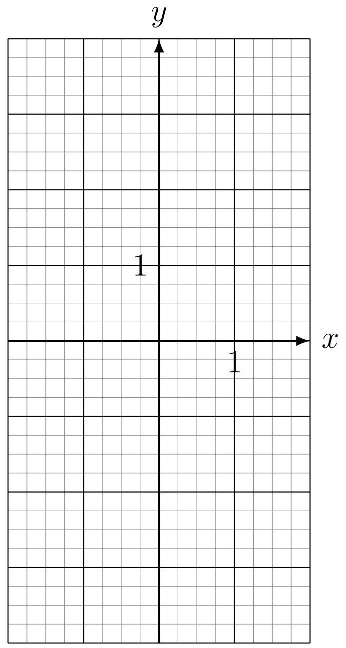
Löse in $\mathbb{Q}$: $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^{x}$

4 Potenzfunktionen

4.1 Potenzfunktionen mit positiven ganzen Exponenten

$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ (Potenzfunktion vom Grad n)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = x$									
$y = x^2$									
$y = x^3$									
$y = x^4$									



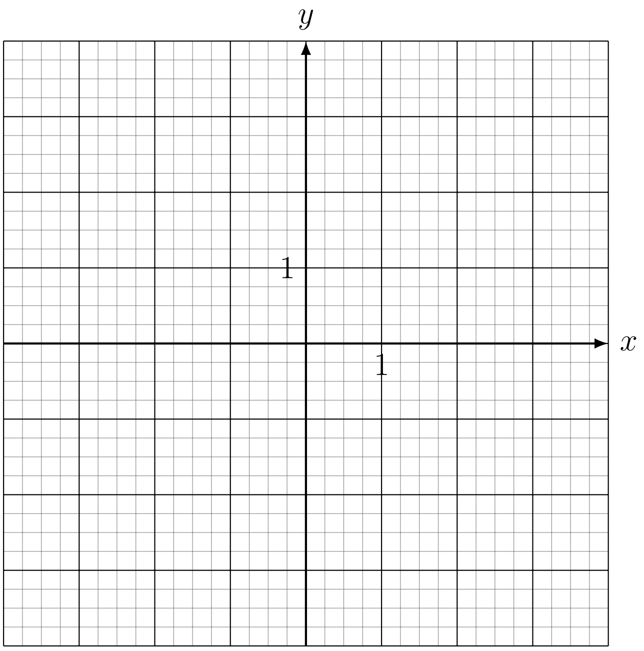
Eigenschaften von x^n

	n gerade	n ungerade
Definitionsbereich		
Wertebereich		
Symmetrie		
Monotonie		
gemeinsame Punkte		

4.2 Potenzfunktionen mit negativen ganzen Exponenten

$f(x) = x^{-n} = 1/x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = x^{-1}$									
$y = x^{-2}$									
$y = x^{-3}$									
$y = x^{-4}$									



Eigenschaften von x^{-n}

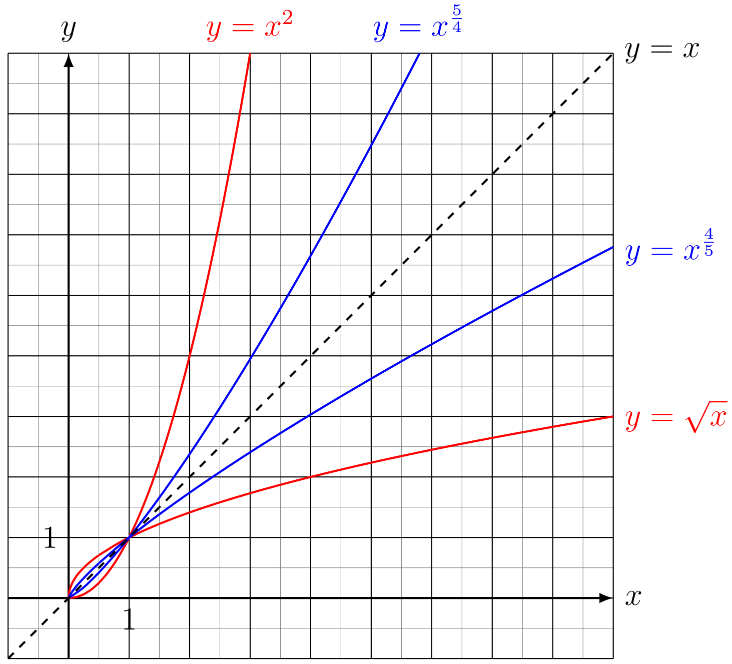
	n gerade	n ungerade
Definitionsbereich		
Wertebereich		
Symmetrie		
Monotonie		
gemeinsame Punkte		

4.3 Die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen

$y = x^n$

1. Die Rollen von x und y vertauschen:

2. Die neue Funktionsgleichung nach y auflösen:



Der Graph der Umkehrfunktion