

# Lösen linearer Gleichungssysteme

## Übungen

# Aufgabe 1

$$3x - 5y - 5z = 5$$

$$x - y = -1$$

$$3x - 2y + 3z = 5$$

## Aufgabe 1

$$3 \quad -5 \quad -5 \quad 5$$

$$1 \quad -1 \quad 0 \quad -1$$

$$3 \quad -2 \quad 3 \quad 5$$

Tausche Zeilen 1 und 2:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{array}$$

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}$$

Tausche Zeilen 2 und 3:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -5 & 8 \end{array}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{array}$$

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{array}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:



$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -65 \\ 0 & 1 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{array}$$

$$1 \ 0 \ 0 \ -65$$

$$0 \ 1 \ 0 \ -64$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 24$$

$$L = \{(-65, -64, 24)\}$$

## Aufgabe 2

$$b + 5c - d = 2$$

$$a - 3c = -2$$

$$3a + b - 3c - d = -2$$

$$-a - b - 3c - d = 2$$

## Aufgabe 2

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 2 \end{array}$$

Tausche Zeilen 1 und 2:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 2 \end{array}$$

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

Addiere das 1-fache von Zeile 1 zur Zeile 4:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 \end{array}$$

Addiere das  $(-1)$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

Addiere das 1-fache von Zeile 2 zur Zeile 4:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 3 zur Zeile 4:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 4 mit  $-\frac{1}{2}$ :



$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Addiere Zeile 4 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Addiere das 3-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das  $(-5)$ -fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

$$L = \{(4, -10, 2, -2)\}$$

## Aufgabe 3

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 4$$

## Aufgabe 3

1	2	1	3	0	4
2	5	2	5	3	1
3	5	2	5	1	1
2	5	2	4	3	0
1	3	1	5	4	4

Addiere das  $(-2)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

Addiere das  $(-2)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 4:

Addiere das  $(-1)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 5:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

Addiere das  $(-1)$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 4:

Addiere das  $(-1)$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 5:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 3 mit  $-1$ :

Multipliziere Zeile 4 mit  $-1$ :



$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 4 zur Zeile 5:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 5 zur Zeile 2:

Addiere das 4-fache von Zeile 5 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 4 zur Zeile 1:

Addiere das 1-fache von Zeile 4 zur Zeile 2:

Addiere das  $(-5)$ -fache von Zeile 4 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Addiere das  $(-1)$ -fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Addiere das  $(-2)$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$L = \{(8, -18, 29, 1, 4)\}$$

## Aufgabe 4

$$x + 2y + z = 1$$

$$5x + 9y + 4z = 6$$



## Aufgabe 4

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 6 \end{array}$$

Addiere das  $(-5)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 2 mit  $-1$ :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Addiere das  $(-2)$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$L = \{(x, y, z) : x = 3 + z, y = -1 - z, z \in \mathbb{R}\}$$

## Aufgabe 5

$$a + 3c = -1$$

$$2a + b + 5c = 1$$

$$3a + 4b + 5c = 4$$

## Aufgabe 5

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{array}$$

Addiere das  $(-2)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 7 \end{array}$$

Addiere das  $(-4)$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 3 mit  $-\frac{1}{5}$ :



$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das 1-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

Addiere das  $(-3)$ -fache von Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$L = \{ \}$$

## Aufgabe 6

$$x + 2y = 5$$

$$4x + 3y = 5$$

$$5x + 2y = 1$$

## Aufgabe 6

1 2 5

4 3 5

5 2 1

Addiere das  $-4$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

Addiere das  $-5$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -8 & -24 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 2 mit  $-\frac{1}{5}$ :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -24 \end{array}$$

Addiere das 8-fache von Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Addiere das  $-2$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 1:



$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$L = \{(-1, 3)\}$$