Der Gauss-Jordan-Algorithmus

Zusammenfassung

Überblick

Der Gauss-Jordan-Algorithmus ermöglicht es, ein Gleichungssystem mechanisch in eine Form zu bringen, aus der die Lösungen abgelesen werden können.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 9 \\ x + 2y - z &= 8 \\ x + y - 2z &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Gauss-Jordan ...

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Schritt 1

Stelle die Koeffizienten des Gleichungssystems als Matrix dar:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 9 \\ x + 2y - z &= 8 \\ x + y - 2z &= 5 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

Schritt 2

Falls nötig, vertausche zwei Zeilen, so dass mit dem vordersten Koeffizienten der ersten Zeile (Pivot), die darunter liegenden Koeffizienten leicht „ausgelöscht“ werden können.

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}$$

Schritt 3

Multipliziere die erste Zeile mit geeigneten Faktoren und addiere sie zu den darunter liegenden Zeilen. Wähle die Faktoren so, dass die Koeffizienten unter dem Pivot Null ergeben.

Addiere das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile und addiere das (-1)-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}$$

Schritt 4

Wiederhole Schritte 2 und 3 für die Teilmatrix die ensteht, wenn man die erste Zeile und erste Kolonnen „wegdenkt“.

$$\begin{array}{r|rrr|}
1 & 2 & -1 & 8 \\ \cline{2-4}
0 & -5 & 3 & -7 \\
0 & -1 & -1 & -3 \\ \cline{2-4}
\end{array}$$

Schritt 4

Wiederhole Schritte 2 und 3 für die Teilmatrix die ensteht, wenn man die erste Zeile und erste Kolonnen „wegdenkt“.

$$\begin{array}{cc}
1 & \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 8 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} -5 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & -3 \end{array}}
\end{array}$$

Wiederhole dies so lange, bis eine Stufenform ensteht: Jede Zeile hat mehr führende Nullen als die vorhergehende.

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & -1 & 8 \\
\hline
0 & \multicolumn{1}{|c}{1} & 1 & 3 \\
\cline{2-4}
0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{8} & 8 \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

Schritt 5

Falls nötig, multipliziere die unterste Zeile mit einem Faktor, so dass der Koeffizient am Fuss der Stufe den Wert 1 hat.

Multipliziere die unterste Zeile mit $1/8$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Schritt 6

Multipliziere die unterste Zeile mit geeigneten Faktoren und addiere sie zu den darüberliegenden Zeilen. Die Faktoren sind so zu wählen, dass die Zahlen über der Stufen-Einsen Null werden:

Addiere dad (-1)-fache der untersten Zeile zur mittleren Zeile und addiere das 1-fache der untersten Zeile zur obersten Zeile:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Schritt 7

Wiederhole Schritte 5 und 6 so lange, bis die Matrix reduzierte Stufenform hat. Das bedeutet, dass alle Elemente auf den Treppenabsätzen den Wert 1 haben und alle darüber liegenden Element(sofern es solche gibt) null sind.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Schritt 8

Die Elemente der letzten Kolonne bilden zusammen die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad L = \{(5, 2, 1)\}$$