Folgen und Reihen

Übungen

Folgen und Reihen

Übungen

Aufgabe 1.1

Gegeben: $a_n = 4n - 3$

Gesucht: a_5 und a_{100}

Aufgabe 1.1

$$a_5 = 4 \cdot 5 - 3 = 17$$

Aufgabe 1.1

$$a_5 = 4 \cdot 5 - 3 = 17$$

$$a_{100} = 4 \cdot 100 - 3 = 397$$

Aufgabe 1.2

Gegeben: $a_n = \sin(n \cdot 90^\circ)$

Gesucht: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$

Aufgabe 1.2

$$a_1 = \sin(90^\circ) = 1$$

Aufgabe 1.2

$$a_1 = \sin(90^\circ) = 1$$

$$a_2 = \sin(180^\circ) = 0$$

Aufgabe 1.2

$$a_1 = \sin(90^\circ) = 1$$

$$a_2 = \sin(180^\circ) = 0$$

$$a_3 = \sin(270^\circ) = -1$$

Aufgabe 1.2

$$a_1 = \sin(90^\circ) = 1$$

$$a_2 = \sin(180^\circ) = 0$$

$$a_3 = \sin(270^\circ) = -1$$

$$a_4 = \sin(360^\circ) = 0$$

Aufgabe 1.2

$$a_1 = \sin(90^\circ) = 1$$

$$a_2 = \sin(180^\circ) = 0$$

$$a_3 = \sin(270^\circ) = -1$$

$$a_4 = \sin(360^\circ) = 0$$

$$a_5 = \sin(450^\circ) = 1$$

Aufgabe 1.3

Gegeben: $a_n = n^2 - 2n + 3$

Gesucht: a_5, a_{10}

Aufgabe 1.3

$$a_5 = 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 18$$

Aufgabe 1.3

$$a_5 = 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 18$$

$$a_{10} = 10^2 - 2 \cdot 10 + 3 = 83$$

Aufgabe 1.4

Gegeben: $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Gesucht: a_1, a_2, a_3

Aufgabe 1.4

$$a_1 = 1$$

Aufgabe 1.4

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$

Aufgabe 1.4

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}$$

Aufgabe 1.5

Bestimme eine explizite Definition der Folge (a_n) mit $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, ...

Aufgabe 1.5

$$a_n = 2n + 3$$

Aufgabe 1.6

Bestimme eine explizite Definition der Folge (a_n) mit

$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1,\ a_4 = -1,\ \ldots$

Aufgabe 1.6

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

Aufgabe 1.7

Bestimme eine explizite Definition der Folge (a_n) mit $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$, ...

Aufgabe 1.7

$$a_n = n^2$$

Aufgabe 1.8

Bestimme das Folgeglied a_5 der rekursiv definierten Folge mit $a_1 = 4$ und $a_{n+1} = 2a_n - 5$.

Aufgabe 1.8

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 5 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

Aufgabe 1.8

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 5 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Aufgabe 1.8

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 5 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

Aufgabe 1.8

$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 5 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -11$$

Aufgabe 1.9

Bestimme das Folgeglied a_5 der rekursiv definierten Folge mit $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = n \cdot a_n + 1$.

Aufgabe 1.9

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Aufgabe 1.9

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

Aufgabe 1.9

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

Aufgabe 1.9

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_5 = 4 \cdot a_4 + 1 = 40 + 1 = 41$$

Aufgabe 1.10

Bestimme das Folgeglied a_7 der rekursiv definierten Folge mit

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 1$

Aufgabe 1.10

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

Aufgabe 1.10

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

Aufgabe 1.10

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Aufgabe 1.10

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$a_6 = a_5 - a_4 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

Aufgabe 1.10

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$a_6 = a_5 - a_4 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$a_7 = a_6 - a_5 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

Aufgabe 1.11

Gib eine rekursive Definition der Folge $(a_n) = (-10, -7, -4, -1, \dots)$ an.

Aufgabe 1.11

Gib eine rekursive Definition der Folge $(a_n) = (-10, -7, -4, -1, \dots)$ an.

Aufgabe 1.11

$a_1 = -10$

Aufgabe 1.11

$$a_1 = -10$$

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

Aufgabe 1.12

Bestimme eine rekursive Definition der Folge $(a_n) = (3, -6, 12, -24, 48, \ldots)$.

Aufgabe 1.12

$a_1 = 3$

Aufgabe 1.12

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = -2 \cdot a_n$$

Aufgabe 1.13

Bestimme die ersten 3 Glieder der Teilsummenfolge (s_n) von $a_n = 5n + 2$.

Aufgabe 1.13

$$s_1 = a_1 = 7$$

Aufgabe 1.13

$$s_1 = a_1 = 7$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 7 + 12 = 19$$

Aufgabe 1.13

$$s_1 = a_1 = 7$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 7 + 12 = 19$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 7 + 12 + 17 = 36$$

Aufgabe 1.14

Die Folge (a_n) hat die Teilsummenfolge $(s_n) = (2, 7, 15, 26, \dots)$

Bestimme die ersten 4 Glieder und das explizite Bildungsgesetz von (a_n).

Aufgabe 1.14

$$a_1 = s_1 = 2$$

Aufgabe 1.14

$$a_1 = s_1 = 2$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = 7 - 2 = 5$$

Aufgabe 1.14

$$a_1 = s_1 = 2$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = 7 - 2 = 5$$

$$a_3 = s_3 - s_2 = 15 - 7 = 8$$

Aufgabe 1.14

$$a_1 = s_1 = 2$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = 7 - 2 = 5$$

$$a_3 = s_3 - s_2 = 15 - 7 = 8$$

$$a_4 = s_4 - s_3 = 26 - 15 = 11$$

Aufgabe 1.14

$$a_1 = s_1 = 2$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = 7 - 2 = 5$$

$$a_3 = s_3 - s_2 = 15 - 7 = 8$$

$$a_4 = s_4 - s_3 = 26 - 15 = 11$$

$$a_n = 3n - 1$$

Aufgabe 2.1

Berechne $\sum_{k=0}^{5} k$.

Aufgabe 2.1

$$\sum_{k=0}^{5} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Aufgabe 2.2

Berechne $\sum_{k=6}^{8}(3k-4)$.

Aufgabe 2.2

$$\sum_{k=6}^{8}(3k-4) = 14 + 17 + 20 = 51$$

Aufgabe 2.3

Berechne $\sum_{j=0}^{100}(-1)^j$.

Aufgabe 2.3

$$\sum_{j=0}^{100}(-1)^j = \underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\ldots+\underbrace{1-1}_{0}+1 = 1$$

Aufgabe 2.4

Berechne $\sum_{i=2}^{20} 5$.

Aufgabe 2.4

$$\sum_{k=2}^{20} 5 = 5 + 5 + \ldots + 5 = 19 \cdot 5 = 95$$

Aufgabe 2.5

Berechne $\sum_{k=2}^{4} \sum_{j=1}^{k} j$.

Aufgabe 2.5

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} \sum_{j=1}^{k} j &= \sum_{j=1}^{2} j + \sum_{j=1}^{3} j + \sum_{j=1}^{4} j \\
&= (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) \\
&= 3 + 6 + 10 = 19
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.6

Berechne $\prod_{i=2}^{4}(-i)$.

Aufgabe 2.6

$$\prod_{i=2}^{4}(-i) = (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$$

Aufgabe 2.7

Berechne $\prod_{k=1}^{100} x$.

Aufgabe 2.7

$$\prod_{k=1}^{100} x$$

Aufgabe 2.7

$$\prod_{k=1}^{100} x = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{100 Faktoren}}$$

Aufgabe 2.7

$$\prod_{k=1}^{100} x = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{100 \text{ Faktoren}} = x^{100}$$

Aufgabe 2.8

Berechne $\displaystyle\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+2}$.

Aufgabe 2.8

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+2}$$

Aufgabe 2.8

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{101} \cdot \frac{100}{102}$$

Aufgabe 2.8

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{101} \cdot \frac{100}{102} = \frac{1 \cdot 2}{101 \cdot 102}$$

Aufgabe 2.8

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{101} \cdot \frac{100}{102} = \frac{1 \cdot 2}{101 \cdot 102} = \frac{1}{5151}$$

Aufgabe 2.9

Berechne $\prod_{k=2}^{4} 2^k$

Aufgabe 2.9

$$\prod_{k=2}^{4} 2^k$$

Aufgabe 2.9

$$\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$$

Aufgabe 2.9

$$\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{2+3+4}$$

Aufgabe 2.9

$$\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9$$

Aufgabe 2.9

$$\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9 = 512$$

Aufgabe 2.10

Aufgabe 2.10

Aufgabe 3.1

Welche der Folgen sind mit Sicherheit keine AF?

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$

(c) $a_n = n^2 + 1$

(d) $a_1 = 1 \; a_{n+1} = 2a_n + 3$

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$ keine AF

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$ keine AF

(c) $a_n = n^2 + 1$

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$ keine AF

(c) $a_n = n^2 + 1$ keine AF

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$ keine AF

(c) $a_n = n^2 + 1$ keine AF

(d) $a_1 = 1 \; a_n = 2a_n + 3$

Aufgabe 3.1

(a) $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ keine AF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \dots)$ keine AF

(c) $a_n = n^2 + 1$ keine AF

(d) $a_1 = 1$ $a_n = 2a_n + 3$ keine AF

Aufgabe 3.2

Bestimme die explizite Definition der AF mit $a_3 = 9$ und $a_8 = 34$

Aufgabe 3.2

$$d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{34 - 9}{5} = 5$$

Aufgabe 3.2

$$d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{34 - 9}{5} = 5$$

$$a_1 = a_3 - 2d = 9 - 10 = -1$$

Aufgabe 3.2

$$d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{34 - 9}{5} = 5$$

$$a_1 = a_3 - 2d = 9 - 10 = -1$$

$$a_n = -1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 6$$

Aufgabe 3.3

Bestimme eine (vereinfachte) explizite Definition der AF (a_n) aus der rekursiven Form mit $a_1 = 15$ und $a_{n+1} = a_n + 11$.

Aufgabe 3.3

$d = 11$

Aufgabe 3.3

$d = 11$

$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 11 = 15 + 11n - 11 = 4 + 11n$

Aufgabe 3.4

Bestimme eine (vereinfachte) explizite Definition der AF mit $a_6 = 24$ und $a_9 = 18$.

Aufgabe 3.4

$$d = \frac{a_9 - a_6}{9 - 6} = \frac{18 - 24}{3} = -2$$

Aufgabe 3.4

$$d = \frac{a_9 - a_6}{9 - 6} = \frac{18 - 24}{3} = -2$$

$$a_1 = a_6 - 5 \cdot d = 24 - 5 \cdot (-2) = 34$$

Aufgabe 3.4

$$d = \frac{a_9 - a_6}{9 - 6} = \frac{18 - 24}{3} = -2$$

$$a_1 = a_6 - 5 \cdot d = 24 - 5 \cdot (-2) = 34$$

$$a_n = 34 + (n - 1) \cdot (-2) = 34 - 2n + 2 = 36 - 2n$$

Aufgabe 3.5

Bestimme die Differenz d der AF

(a) $a_n = 10 + 5 \cdot n$

(b) $a_n = 30 - \sqrt{2} \cdot n$

Aufgabe 3.5

(a) $d = 5$

(b) $d = -\sqrt{2}$

Aufgabe 3.6

Bestimme die Differenz d der AF.

(a) $a_n = 43 + 7n$

(b) $b_n = 13 - 1.2n$

Aufgabe 3.6

(a) $d = 7$

(b) $d = -1.2$

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.
(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3
(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4
(d) Bestimme den Mittelwert von a_3 und a_5
(e) Was stellst du fest?

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \dots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \dots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4

$(a_2 + a_4)/2 = (5 + 13)/2 = 9 = a_3$

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \dots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4

$(a_2 + a_4)/2 = (5 + 13)/2 = 9 = a_3$

(d) Bestimme den Mittelwert von a_3 und a_5

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

(1, 5, 9, 13, 17, ...)

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4

$(a_2 + a_4)/2 = (5 + 13)/2 = 9 = a_3$

(d) Bestimme den Mittelwert von a_3 und a_5

$(a_3 + a_5)/2 = (9 + 17)/2 = 13 = a_4$

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \dots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4

$(a_2 + a_4)/2 = (5 + 13)/2 = 9 = a_3$

(d) Bestimme den Mittelwert von a_3 und a_5

$(a_3 + a_5)/2 = (9 + 17)/2 = 13 = a_4$

(e) Was stellst du fest?

Aufgabe 3.7

(a) Gib die ersten 5 Glieder der AF $a_n = 4n - 3$ an.

$(1, 5, 9, 13, 17, \dots)$

(b) Bestimme den Mittelwert von a_1 und a_3

$(a_1 + a_3)/2 = (1 + 9)/2 = 5 = a_2$

(c) Bestimme den Mittelwert von a_2 und a_4

$(a_2 + a_4)/2 = (5 + 13)/2 = 9 = a_3$

(d) Bestimme den Mittelwert von a_3 und a_5

$(a_3 + a_5)/2 = (9 + 17)/2 = 13 = a_4$

(e) Was stellst du fest?

Ab a_2 ist jedes Folgeglied das arithmetische Mittel seiner beiden unmittelbaren Nachbarn.

Aufgabe 3.8

Eine AF mit der Differenz $d = 3$ beginnt mit 17 und endet mit 284. Wie viele Glieder hat die Folge?

Aufgabe 3.8

$$284 = 17 + (n-1)\,3 \Rightarrow n = 89$$

Aufgabe 3.9

Von einer arithmetische Folge sind $a_3 = 53$ und $a_8 = 118$ bekannt. Bestimme d, a_1 und allgemein a_n.

Aufgabe 3.9

$a_8 - a_3 = 65 = 5d \Rightarrow d = 13,\ a_1 = a_3 - 2d = 27,$
$a_n = 27 + (n-1) \cdot 13$

Aufgabe 3.10

Bestimme a_1 und d einer AF aus $a_5 + a_{11} = 58$ und $a_6 + a_{14} = 80$.

Aufgabe 3.10

Ersetzen $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{11} = a_1 + 10d$ und $a_6 = a_1 + 5d$, $a_{14} = a_1 + 13d$ und setzen ein:

$$\begin{array}{c} (a_1 + 4d) + (a_1 + 10d) = 58 \\ (a_1 + 5d) + (a_1 + 13d) = 80 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 2a_1 + 14d = 58 \\ 2a_1 + 18d = 80 \end{array} \Rightarrow$$

$$4d = 22 \Rightarrow d = 5.5$$

$$2a_1 + 14 \cdot 5.5 = 58 \Rightarrow a_1 = -9.5$$

Aufgabe 3.11

Gegeben ist die durch $a_1 = 4$ und $d = 3$ bestimmten AF. Berechne s_{20}.

Aufgabe 3.11

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ (bekannt)

Explizite Def. der AF $a_n = a_1 + (n-1)d$ oben einsetzen:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \big(a_1 + a_1 + (n-1)d\big) = \frac{n}{2} \cdot \big(2a_1 + (n-1)d\big) = \frac{n}{2} \cdot 2a_1 + \frac{n}{2}(n-1)d$$

$$s_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Konkret: $s_{20} = 4 \cdot 20 + \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 3}{2} = 650$

Aufgabe 3.12

Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 37 bis 95.

Aufgabe 3.12

$37 + 38 + \cdots + 95 = ?; \quad a_1 = 37;\ d = 1;\ a_n = 95$

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \Rightarrow n - 1 = \dfrac{a_n - a_1}{d} = \dfrac{95 - 37}{1} = 58 \Rightarrow n = 59$

$s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n) = \dfrac{59}{2}(37 + 95) = 3894$

Aufgabe 3.13

Berechne die Summen der AF.

(a) $6 + 13 + \cdots + 307$

(b) $128 + 117 + \cdots + (-510)$

Aufgabe 3.13

(a) $a_1 = 6,\ a_2 = 13 \quad \Rightarrow \quad d = 7$

$a_n = 307 = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad n = 44$

$s_{44} = \frac{44}{2} \cdot (6 + 307) = 6886$

(b) $a_1 = 128,\ a_2 = 117 \quad \Rightarrow \quad d = -11$

$a_n = -510 = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad n = 59$

$s_{59} = \frac{59}{2} \cdot (128 - 510) = -11\,269$

Aufgabe 3.14

Berechne.

(a) $\displaystyle\sum_{i=5}^{333}(7+2i)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=-9}^{99}(130-3k)$

Aufgabe 3.14

(a) $\sum_{i=5}^{333}(7+2i) = \frac{333-5+1}{2} \cdot (17+673) = 113\,505$

(b) $\sum_{i=-9}^{90}(130-3k) = \frac{90-(-9)+1}{2} \cdot (157+(-140)) = 850$

Aufgabe 3.15

Drei der fünf Grössen a_1, a_n, d, n, s_n einer AF sind gegeben. Berechne die fehlenden zwei.

(a) $a_1 = 3\frac{1}{3}$, $a_n = 43$, $s_n = 417$

(b) $d = \frac{2}{5}$, $a_n = 7$, $s_n = 36$

Aufgabe 3.15

(a) $n = 18$, $a_{18} = 2\frac{1}{3}$

(b) $n_1 = 6$, $n_2 = 5$ und $a_{1,1} = 5$, $a_{1,2} = -4\frac{3}{5}$

Aufgabe 3.16

Wie viele Glieder der AF mit $a_1 = 5$, $a_2 = 23$, $a_4 = 41, \ldots$ sind kleiner als 10^6?

Aufgabe 3.16

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 18 < 10^6 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 55 556 Folgeglieder sind kleiner als 10^6.

Aufgabe 3.17

Bei einer AF ist $s_7 = 21$ und $s_8 = 25$. Berechne a_1 und die Differenz d.

Aufgabe 3.17

$$s_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \qquad = 21$$
$$s_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 25$$

Also $a_8 = 4$. Aus $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ folgt für $n = 8$:

$$25 = 4(a_1 + 4)$$
$$a_1 = 2.25$$

und

$$d = (a_8 - a_1)/7 = (4 - 2.25)/7 = 0.25$$

Aufgabe 3.18

In der Vorrunde eines Volleyballturniers mit 17 Mannschaften soll jede Mannschaft genau einmal gegen jede der anderen Mannschaften spielen. Wie viele Spiele müssen ausgetragen werden?

Aufgabe 3.18

Die 1. Mannschaft muss gegen 16 Gegner spielen

Die 2. Mannschaft muss gegen 15 Gegner spielen

...

Die 15. Mannschaft muss gegen 2 Gegner spielen

Die 16. Mannschaft muss gegen 1 Gegner spielen

$$1 + 2 + \cdots + 15 + 16 = \frac{16}{2}(1 + 16) = 8 \cdot 17 = 136$$

Aufgabe 3.19

Die Winkel eines Fünfecks bilden eine AF. Der grösste Winkel misst 176°. Berechne den kleinsten Winkel.

Aufgabe 3.19

Winkelsumme im Fünfeck: $5 \cdot 180 - 360 = 540°$

$$
\begin{aligned}
a_5 &= 176^\circ \\
s_5 &= 540^\circ \\
s_n &= n/2 \cdot (a_1 + a_n) \\
540 &= 5/2 \cdot (a_1 + 176) \\
1080 &= 5\,a_1 + 880 \\
200 &= 5\,a_1 \\
a_1 &= 40^\circ
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.1

Untersuche, ob es sich um eine GF handelt?

(a) $a_n = n^2$

(b) $(a_n) = (\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \dots)$

(c) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = 0.9 \cdot a_n$

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ \ldots$

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ \ldots$

q ist nicht konstant; also keine GF

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ \ldots$

q ist nicht konstant; also keine GF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \ldots)$

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ \ldots$

q ist nicht konstant; also keine GF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \ldots)$

möglicherweise eine GF mit $q = -2$

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ \ldots$

q ist nicht konstant; also keine GF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \ldots)$

möglicherweise eine GF mit $q = -2$

(c) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = 0.9 \cdot a_n$

Aufgabe 4.1

(a) $a_n = n^2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ \ldots$

q ist nicht konstant; also keine GF

(b) $(a_n) = (\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \ldots)$

möglicherweise eine GF mit $q = -2$

(c) $a_1 = 7,\ a_{n+1} = 0.9 \cdot a_n$

GF mit $q = 0.9$

Aufgabe 4.2

Bilden die angegebenen Zahlen den Anfang einer GF? Falls ja, wie gross ist q?

(a) $1,\ 1.1,\ 1.21,\ 1.331,\ \ldots$

(b) $0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ \ldots$

(c) $24,\ -18,\ -12,\ \ldots$

(d) $2,\ \sqrt{2},\ 1,\ \ldots$

Aufgabe 4.2

(a) Ja, $q = 1.1$

(b) Ja, $q = 2$

(c) Nein

(d) Ja, $q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 4.3

Gib eine explizite Definition der GF (a_n) mit $a_1 = 3$ und $a_2 = 4$ an.

Aufgabe 4.3

$$q = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 4.3

$$q = \frac{4}{3}$$

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Aufgabe 4.4

Gegeben: GF mit $a_4 = 100$ und $a_6 = 25$ und $q > 0$

Gesucht: explizite Definition

Aufgabe 4.4

$$a_6 = a_4 \cdot q^2$$

Aufgabe 4.4

$$a_6 = a_4 \cdot q^2$$

$$25 = 100 \cdot q^2$$

Aufgabe 4.4

$$a_6 = a_4 \cdot q^2$$

$$25 = 100 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.4

$$a_6 = a_4 \cdot q^2$$

$$25 = 100 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_4 : q^3 = 100 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100 \cdot 2^3 = 800$$

Aufgabe 4.4

$$a_6 = a_4 \cdot q^2$$

$$25 = 100 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = a_4 : q^3 = 100 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100 \cdot 2^3 = 800$$

$$a_n = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Aufgabe 4.5

Gegeben: GF mit $a_2 = 8$, $a_5 = 216$

Gesucht: q, a_7

Aufgabe 4.5

$$a_5 = a_2 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad 216 = 8 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad q = 3$$

Aufgabe 4.5

$$a_5 = a_2 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad 216 = 8 \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad q = 3$$

$$a_7 = a_5 \cdot q^2 = 216 \cdot 3^2 = 1944$$

Aufgabe 4.6

Gegeben: GF mit $(a_n) = (4, 5, \dots)$

Gesucht: s_{10}

Aufgabe 4.6

$$q = \frac{5}{4} = 1.25$$

Aufgabe 4.6

$$q = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$s_{10} = 4 \cdot \frac{1.25^{10} - 1}{1.25 - 1} \approx 133.01$$

Aufgabe 4.7

Wie viele Glieder der GF mit $a_1 = 5$, $a_2 = 6$ sind kleiner als 10^8?

Aufgabe 4.7

$q = 6/5 = 1.2$

Aufgabe 4.7

$$q = 6/5 = 1.2$$

$$\begin{aligned} a_n = 5 \cdot 1.2^{n-1} &< 10^8 \\ 1.2^{n-1} &< 10^8/5 \\ \lg 1.2^{n-1} &< \lg(10^8/5) \\ (n-1)\lg 1.2 &< \lg(10^8/5) \\ n &< \frac{\lg(10^8/5)}{\lg 1.2} + 1 \\ n &< 93.21 \end{aligned}$$

also 93 Folgeglieder

Aufgabe 4.8

Wie viele Glieder der GF mit $a_1 = 8$, $a_2 = 7$ sind grösser als 10^{-4}?

Aufgabe 4.8

$q = 7/8 = 0.875$

Aufgabe 4.8

$$q = 7/8 = 0.875$$

$$\begin{aligned}
a_n = 8 \cdot (7/8)^{n-1} &> 10^{-4} \\
(7/8)^{n-1} &> 10^{-4}/8 \\
\lg(7/8)^{n-1} &> \lg(10^{-4}/8) \\
(n-1)\lg(7/8) &> \lg(10^{-4}/8) \\
n &> \frac{\lg(10^{-4}/8)}{\lg(7/8)} + 1 \\
n &> 85.55
\end{aligned}$$

also 86 Folgeglieder

Aufgabe 4.9

Eine GF mit $a_1 = 2$ und $q = 3$ hat die Summe $s_n = 129\,140\,162$.
Berechne n.

Aufgabe 4.9

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aufgabe 4.9

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$129\,140\,162 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$$

Aufgabe 4.9

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$129\,140\,162 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$$

$$129\,140\,162 = 3^n - 1$$

Aufgabe 4.9

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$129\,140\,162 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$$

$$129\,140\,162 = 3^n - 1$$

$$3^n = 129\,140\,163$$

Aufgabe 4.9

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
129\,140\,162 &= 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\
129\,140\,162 &= 3^n - 1 \\
3^n &= 129\,140\,163 \\
n \lg 3 &= \lg 129\,140\,163
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.9

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
129\,140\,162 &= 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\
129\,140\,162 &= 3^n - 1 \\
3^n &= 129\,140\,163 \\
n \lg 3 &= \lg 129\,140\,163 \\
n &= \frac{\lg 129\,140\,163}{\lg 3} = 17
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.9

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$129\,140\,162 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$$

$$129\,140\,162 = 3^n - 1$$

$$3^n = 129\,140\,163$$

$$n \lg 3 = \lg 129\,140\,163$$

$$n = \frac{\lg 129\,140\,163}{\lg 3} = 17$$

$$n = 17$$

Aufgabe 4.10

Wie viele Glieder der Folge $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ muss man mindestens addieren, damit die Summe grösser als eine Milliarde wird?

Aufgabe 4.10

$$s_n = 6 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} > 10^9 \quad \Rightarrow \quad (-3) \cdot (1-3^n) > 10^9 \quad \Rightarrow$$

$$1 - 3^n < \frac{10^9}{-3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{10^9}{-3} < 3^n$$

$$\Rightarrow \log_{10}\left(1 + \frac{10^9}{3}\right) < n \cdot \log_{10} 3 \quad \Rightarrow \quad \log_{10}\left(1 + \frac{10^9}{3}\right) :$$

$$\log_{10} 3 < n \quad \Rightarrow \quad 17.86 < n$$

mindestens 18 Folgeglieder

Aufgabe 4.11

Zwischen 125 und 512 sind zwei Folgeglieder einzuschieben, dass eine GF entsteht.

Aufgabe 4.11

$$a_1 = 125,\ a_2 =?,\ a_3 =?,\ a_4 = 512$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{512}{125} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{512}{125}} = \frac{8}{5}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 125 \cdot \frac{8}{5} = 200$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = 200 \cdot \frac{8}{5} = 320$$

Aufgabe 4.12

Wie viele Glieder hat eine GF mit $a_1 = 6$, $q = 3$ und $s_n = 282\,429\,536\,478$?

Aufgabe 4.12

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\begin{aligned}
282\,429\,536\,478 &= 6 \cdot \frac{1-3^n}{-2} \\
-94\,143\,178\,826 &= 1 - 3^n \\
3^n &= 94\,143\,178\,827 \\
n \cdot \lg 3 &= \lg 94\,143\,178\,827 \\
n &= 23
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.13

Gegeben sind die ersten beiden Glieder einer GF. Falls sie konvergiert, ist der Grenzwert s der zu ihr gehörenden Reihe (s_n) zu berechnen.

(a) $5, \ -3, \ \ldots$

(b) $1, \ -1, \ \ldots$

Aufgabe 4.13

(a) $s = \frac{25}{8}$

(b) s existiert nicht

Aufgabe 4.14

Gegeben sind die ersten beiden Glieder einer GF. Falls sie konvergiert, ist der Grenzwert s der zu ihr gehörenden Reihe (s_n) zu berechnen.

(a) $9, 4, \ \ldots$

(b) $0.12, 0.012, \ \ldots$

Aufgabe 4.14

(a) $s = \frac{81}{5}$

(b) $s = \frac{2}{15}$

Aufgabe 4.15

Eine GF mit dem Quotienten q und dem ersten Folgeglied a_1 hat den Grenzwert s. Bestimme die fehlende Grösse.

(a) $q = 0.75,\ s = 100,\ a_1 = ?$

(b) $a_1 = 5,\ s = 6,\ q = ?$

Aufgabe 4.15

(a) $a_1 = 25$

(b) $s = \frac{1}{6}$

Aufgabe 4.16

Einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels auf die Kantenmitten der Deckfläche des ersten Würfels zu liegen kommen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt usw.

(a) Wie hoch wird der Würfel-Turm höchstens?

(b) Berechne den Grenzwert des Turmvolumens.

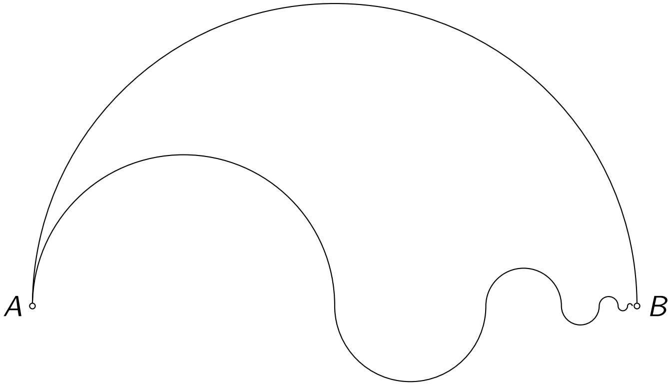
Aufgabe 4.16

(a) $3.4142\,\mathrm{m}$

(b) $1.5469\,\mathrm{m}^3$

Aufgabe 4.17

Der „Schlangenweg“ von A nach B setzt sich aus unendlich vielen Halbkreisbögen zusammen, deren Radien einen GF mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$ bilden.



(a) Ist der Schlangenweg oder der Halbkreisweg von A nach B kürzer?

(b) Berechne formal den Inhalt der Fläche zwischen den Wegen.

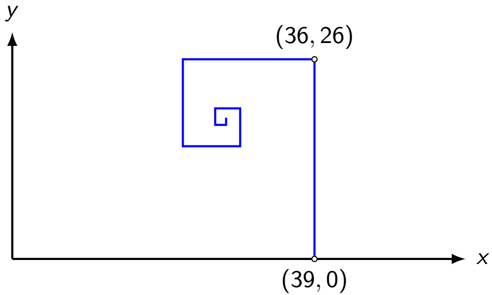
Aufgabe 4.17

(a) Beide Wege haben die Länge πr

(b) $0.4\pi r^2$

Aufgabe 4.18

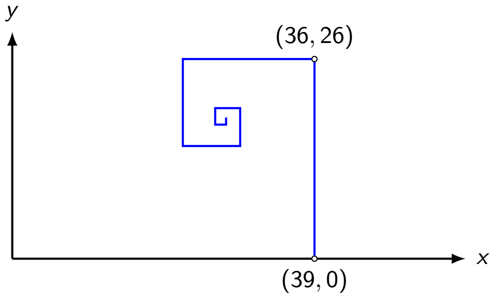
Gegeben ist ein spiralförmiger Polygonweg, dessen Strecken eine GF bilden.



(a) Wie lang ist ist der Polygonweg?

(b) Gegen welchen Endunkt konvergiert der Weg?

Aufgabe 4.18

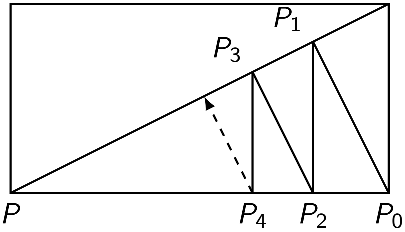


(a)

(b)

Aufgabe 4.19

Wie lang ist der aus unendlich vielen Strecken zusammengesetzte Weg von P_0 über P_1, P_2, P_3, ... bis P?



Aufgabe 4.19

Die in der Figur vorkommenden Dreiecke sind alle ähnlich zum Dreieck mit den Katheten 1 und 2 sowie der Hypotenuse $\overline{P_0P} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Das bedeutet, dass die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich sind.

Also $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_0P_1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Wegen $\overline{P_0P_1} = 1$ gilt $q = \overline{P_1P_2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} \approx 9.4721$$