Folgen und Reihen

Theorie

Inhaltsverzeichnis

Version vom 16. Februar 2022

1 Begriffe

Eine (reelle) Zahlenfolge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine (reelle) Zahl zuordnet.

Beispiel 1.1

$a(n) = 6n + 7$ definiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge:

- Statt $a(n)$ schreibt man kürzer a_n und bezeichnet damit ein *einzelnes* Folgeglied mit dem *Index n*.

  Beispiel: .

- (a_n) bezeichnet *die gesamte Folge*.

  Beispiel:

Beispiel 1.2

$a_n = (-2)^n$

Beispiel 1.3

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Eine Folge (a_n) ist *explizit definiert* wenn sich das Folgeglied a_n direkt aus dem Index n bestimmen lässt.

Die Folgen in den Beispielen 1.1–1.3 sind explizit definiert.

Eine Folge (a_n) ist *rekursiv definiert* wenn sich das Folgeglied a_n aus einem Vorgänger (oder mehreren Vorgängern) bestimmen lässt und die nötige Anzahl .

Beispiel 1.4

Rekursive Definition der Folge aus Beispiel 1.1:

$a_1 = 13,\ a_{n+1} = a_n + 6$

- Der gesamte Term $n+1$ ist tiefergestellt und bezeichnet den *Index des Nachfolgers*.
- Da die Rekursionsvorschrift den Wert des Nachfolgers aus dem Vorgänger berechnet, muss ein Startwert – hier a_1 – gegeben sein.

Beispiel 1.5

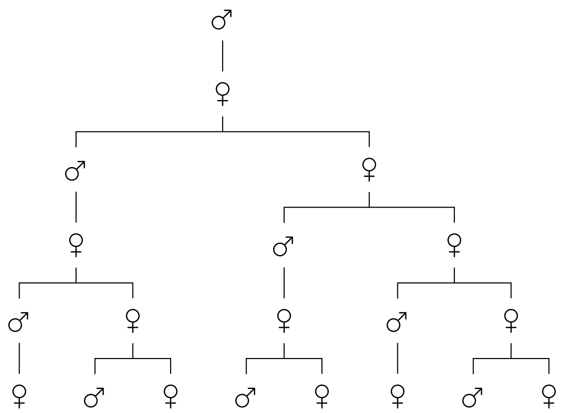
$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

Beispiel 1.6

Die Definition kann auch von mehreren Vorgängern abhängen.

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Die Folge aus Beispiel 1.6 wird *Fibonacci-Folge* genannt. Mit ihr lässt sich zum Beispiel die Anzahl der Vorfahren einer Drohne in der n-ten Generation bestimmen.



(Drohnen entstehen aus den unbefruchteten Eiern einer Königin und haben daher keinen Vater.)

Die Teilsummenfolge

Ist (a_n) eine beliebige Folge, so lässt sich durch Aufsummieren der Folgeglieder von (a_n) die *Teilsummenfolge* (s_n) bilden:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\dots$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Eine Teilsummenfolge wird auch *Reihe* genannt.

Beispiel 1.7

Ist (a_n) die Folge aus Beispiel 1.1 mit $a_1 = 13$, $a_2 = 19$, $a_3 = 25$, $a_4 = 31$, $\ldots$, so lautet die Teilsummenfolge:

Beispiel 1.8

Folge (a_n) mit $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $\ldots$

Teilsummenfolge (s_n):

2 Summen- und Produktzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ dient dazu, Summen in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

Beispiel 2.1

$$\sum_{j=-2}^{2} j^2$$

Beispiel 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beispiel 2.3

$$\sum_{i=1}^{4} x$$

Das *Produktzeichen* $\prod$ dient dazu, Produkte in kompakter Form darzustellen. Es wird wie folgt verwendet:

Beispiel 2.4

$$\prod_{i=1}^{5} i$$

Beispiel 2.5

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1}$$

3 Arithmetische Folgen

Eine *arithmetische Folge* (AF) ist eine Folge, bei der die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant $d \neq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = d \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition:

rekursive Definition:

Fundamentum: Seite 52

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 39

Beispiel 3.1

(a) $(a_n) = (3, 7, 11, 15, \dots)$

(b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$

(c) $a_1 = x$, $a_2 = 2x + y$, $a_3 = 3x + 2y$, $\dots$

Beispiel 3.2

Gegeben: $a_n = 20 - 7n$. Bestimme a_1 und d.

Beispiel 3.3

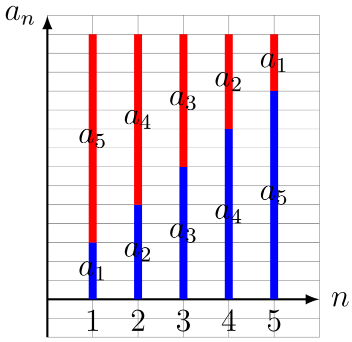
Für die AF (a_n) gilt $a_3 = 17$ und $d = 2$. Bestimme a_1, a_{10} und eine vereinfachte Form der expliziten Definition.

Beispiel 3.4

Für die AF (a_n) gilt $a_5 = 2$ und $a_9 = 12$. Bestimme d, a_1 und eine einfache Form der expliziten Definition.

Beispiel 3.5

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2; \quad s_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = ?$



Die Summe des ersten und des letzten Folgeglieds ist gleich gross wie die Summe des zweiten und des zweitletzten Folgeglieds usw.

Der Trick: $s_5 =$

Die Summenformel der AF

Allgemein gilt für eine AF:

Fundamentum: Seite 52

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 39

Beispiel 3.6

Berechne die Summe der ersten 100 Glieder der AF $a_n = 7 + 4n$.

Beispiel 3.7

Wie gross ist die Summe aller höchstens dreistelligen (ohne Rest) durch 3 teilbaren Zahlen?

Beispiel 3.8

Gegeben: AF mit $a_1 = 3$ und $s_{42} = 4431$

Gesucht: d

4 Geometrische Folgen

Eine *geometrische Folge* (GF) ist eine Folge, bei der der Quotient $q \neq 1$ aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$a_{n+1} : a_n = q \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Definition:

rekursive Definition:

Fundamentum: Seite 53

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 40

Beispiel 4.1

(a) (a_n): 7, 14, 28, 56, ...

(b) (a_n): 81, 27, 9, 3, ...

(c) (a_n): 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, ...

(d) (a_n): 1, -1, 1, -1, 1, ...

Beispiel 4.2

Bestimme die explizite Definition der GF mit $a_1 = -3$ und $a_{n+1} = 2a_n$.

Beispiel 4.3

Bestimme a_7 und a_1 der GF mit $a_3 = 128$ und $q = \frac{1}{2}$.

Beispiel 4.4

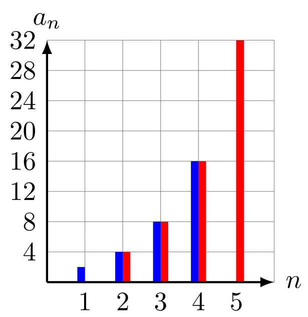
Bestimme eine explizite Definition der GF mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 13.5$.

Beispiel 4.5

Ab welchem n sind die Glieder der GF $a_n = 3 \cdot 1.1^n$ grösser als 10^9?

Beispiel 4.6

Gegeben: GF mit $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; Gesucht: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$



Die Summenformel der GF

Allgemein gilt für eine GF:

Fundamentum: Seite 53

Formeln, Tabellen, Begriffe: Seite 40